DIE KONSTRUKTIBLE HIERARCHIE ALS HILFSMITTEL ZUR BEWEISTHEORETISCHEN UNTERSUCHUNG VON TEILSYSTEMEN DER MENGENLEHRE UND ANALYSIS

Gerhard Jäger

1979

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535715_0012

DIE KONSTRUKTIBLE HIERARCHIE ALS HILFSMITTEL ZUR BEWEISTHEORETISCHEN UNTERSUCHUNG VON TEILSYSTEMEN DER MENGENLEHRE UND ANALYSIS

D I S S E R T A T I O N

der Fakultät für Mathematik

der Ludwig-Maximilians-Universität München

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von Gerhard Jäger

eingereicht am 4. Oktober 1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Professor Dr. K. Schütte

2. Berichterstatter: Privatdozent Dr. W. Pohlers

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Dezember 1979

DISSERTATIONS - UND FOTODRUCK FRANK GmbH
8000 München 2, Gabelsbergerstraße 15, Tel. 2809090

I N H A L T

Einleitung I

Teil A. Theorien für zulässige Mengen

1. Syntaktische und semantische Grundlagen 1

2. Die Theorie KPu 6

3. Die Theorien KPl^r, W-KPl und KPl 11

4. Die Theorien KPi^r, W-KPi und KPi 18

5. Die halbformalen Systeme H_o und H_1 19

Teil B. Das System RS(Ω) der geschichteten Mengenlehre

1. Das Ordinalzahlbezeichnungssystem 24

2. Die Sprache von RS(Ω) 26

3. Ordinalzahltheoretische Hilfsmittel 31

4. Herleitungen in RS(Ω) 33

5. Schnittelimination in RS(Ω) 39

6. Mengentheoretische Eigenschaften von RS(Ω) 44

7. Der Zusammenhang zwischen RS(Ω) und den L_u-Hierarchien 54

Teil C. Die Ordinalzahlanalyse

1. Die beweistheoretische Ordinalzahl 57

2. Die beweistheoretische Ordinalzahl von KPu 58

3. Die beweistheoretischen Ordinalzahlen von KPi^r und W-KPi 59

4. Die Ordinalzahlanalyse verwandter Systeme 64

Literatur 68

Einleitung

Die meisten Teile der Mathematik stützen sich heute auf nichtkonstruktive mengentheoretische Prinzipien; die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZFC) hat sich als formaler Rahmen etabliert. Der Hauptgrund, Mathematik in wesentlich schwächeren Systemen zu betreiben, ist folgende Tatsache: Die volle Stärke von ZFC wird in der mathematischen Praxis nicht ausgenutzt; es ist zwar richtig, daß die Theoreme und Beweise aus Bequemlichkeit in der Sprache von ZFC formuliert werden, meistens kämen wir aber bereits mit wesentlich schwächeren Mitteln aus. Andererseits folgt aus den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen, daß es sogar Sätze in der Sprache der Zahlentheorie gibt, die wir in einer starken Theorie (z.B. ZFC) beweisen können, nicht aber etwa in einem Teilsystem der Analysis. Daher beschäftigt sich die mathematische Logik auch damit, schwache Theorien zu suchen, in denen sich große Teile der Mathematik betreiben lassen, und ihre Tragweite genau abzugrenzen. Ausgehend von Hilbert, begann man mit der Behandlung von Teilsystemen der Analysis; in neuerer Zeit werden auch Theorien monotoner induktiver Definitionen, Teilsysteme der Mengenlehre und Systeme konstruktiver Mathematik untersucht, siehe dazu [1], [5], [9], [10], [11], [12], [13], [15], [16], [20], [21], [22], [26], [29], [31], [34], [35].

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode zur uniformen beweistheoretischen Behandlung solcher Systeme entwickelt, die sich sehr eng an Gödels Theorie der konstruktiblen Mengen anlehnt. Wir führen dazu eine geschichtete Mengenlehre $RS(\Omega)$ ein, die aufgrund ihrer Sprache, Axiome und Schlußregeln als beweis-

theoretisches Analogon (eines Abschnittes) der konstruktiblen Hierarchie angesehen werden kann. Es folgen einige Bemerkungen zu unserem Vorgehen:

1. Bis jetzt wurden, ausgehend von Gentzens Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Zahlentheorie, hauptsächlich Teilsysteme der Analysis und Theorien monotoner induktiver Definitionen direkt mit beweistheoretischen Methoden untersucht. Die Behandlung von Teilsystemen der Mengenlehre wurde von Feferman und Friedman in [10] und [16] auf Teilsysteme der Analysis zurückgeführt, was mit einem erheblichen Kodierungsaufwand verbunden war.
In der vorliegenden Arbeit vermeiden wir den Umweg über die Analysis und führen die beweistheoretischen Reduktionen direkt am System $RS(\Omega)$ durch. Dieses System ist sehr kanonisch, da es sich eng an Gödels konstruktible Hierarchie anlehnt. Weil es außerdem hinreichend stark ist und in einem mengentheoretischen Rahmen formuliert wird, lassen sich nahezu alle beweistheoretisch relevanten Theorien auf ganz natürliche Weise darin interpretieren. Auf diese Art können wir also die beweistheoretische Analyse solcher System einheitlich durchführen.
Prinzipiell scheint es möglich, für unsere Untersuchungen anstelle von $RS(\Omega)$ ein geschichtetes System der Analysis zu verwenden, indem man auf eine Methode von [19] zurückgreift. Allerdings muß man dann bei der Behandlung von manchen Systemen der mathematischen Praxis beträchtliche Kodierungsarbeit in Kauf nehmen.

2. Spätestens bei der Untersuchung monotoner induktiver Definitionen hat es sich gezeigt, daß das Zusammenspiel von Beweis-

theorie und Definierbarkeitstheorie äußerst fruchtbar ist. Dabei soll vor allem das klassische Ergebnis erwähnt werden, daß für eine Relation R über der Standardstruktur $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, \mathcal{C}, 1 \rangle$ der natürlichen Zahlen gilt:

$R\ \Pi^1_1$ auf $\mathcal{N}$ $\Leftrightarrow$ R IND auf $\mathcal{N}$ $\Leftrightarrow$ $R\ \Sigma_1$ auf $HYP_{\mathcal{N}} = L(\omega_1^{CK})_{\mathcal{N}}$.

Während in [5], [9], [26] und [34] im wesentlichen die erste Äquivalenz ausgenutzt wird, kommt in dieser Arbeit auch die zweite Äquivalenz zum Tragen. Durch Anlehnung an die konstruktible Hierarchie lassen sich Zusammenhänge von Beweistheorie und Definierbarkeitstheorie weiter aufdecken und ausbauen; besonders deutlich wird dabei die Schlüsselrolle der Zulässigkeit.

3. Haben wir einmal den mengentheoretischen Rahmen akzeptiert, so ist unser weiteres Vorgehen in einem gewissen Sinne determiniert. Wir gehen aus von der Standardstruktur $\mathcal{N}$ der natürlichen Zahlen, die wir uns als gegeben denken. Über diesen Urelementen errichten wir uns das größtmögliche Universum $V_{\mathbb{N}}$, indem wir definieren (vgl. [2]):

$V_{\mathbb{N}}(0)$:= leere Menge

$V_{\mathbb{N}}(\alpha+1)$:= Potenzmenge von $(\mathbb{N} \cup V_{\mathbb{N}}(\alpha))$

$V_{\mathbb{N}}(\lambda)$:= $\bigcup \{V_{\mathbb{N}}(\alpha) : \alpha < \lambda\}$, wenn λ eine Limeszahl ist

$V_{\mathbb{N}}$:= $\bigcup \{V_{\mathbb{N}}(\alpha) : \alpha \in On\}$

Für beweistheoretische Untersuchungen ist dieses Universum jedoch viel zu breit, da bereits $V_{\mathbb{N}}(1)$ überabzählbar viele Elemente hat. Relevant sind jedoch nur diejenigen Mengen, die sich über der Struktur $\mathcal{N}$ durch Formeln beschreiben lassen. Daher können wir uns auf das 'Miniuniversum' $L_{\mathcal{N}} = \bigcup \{L(\mathcal{N}, \alpha) : \alpha \in On\}$ beschränken, das durch die (relative) konstruktible Hierarchie

gegeben ist. Wegen der lokalen Prädikativität der konstruktiblen Hierarchie macht der Nachfolgerschritt $L(N,\alpha) \to L(N,\alpha+1)$ jetzt keine Schwierigkeiten; es ist entscheidend, den Limesschritt nur für solche λ auszuführen, über die wir genügend Information besitzen. Beweistheoretisch relevant sind daher Abschnitte $L(N,\alpha)$ mit einem kontrollierbaren α, das hinreichend schöne Abschlußeigenschaften besitzt.

In Teil A werden Mengentheorien KPu, KPl und KPi über den natürlichen Zahlen als Urelementbereich eingeführt, die gerade solche Abschlußeigenschaften formalisieren. Die Urelementtheorie ist jeweils gegeben durch die Axiome der Zahlentheorie mit dem Schema der vollständigen Induktion; die elementare Mengenbildung wird bestimmt durch Extensionalitätsaxiom, Paarmengenaxiom, Vereinigungsmengenaxiom, die Instanzen des Fundierungs- und Δ_0-Separationsschemas sowie durch ein Axiom, das besagt, daß die Urelemente eine Menge bilden. Entscheidend sind die weiteren mengentheoretischen Axiome:

(a) KPu umfaßt zusätzlich das Δ_0-Kollektionsschema, und wir erhalten $L(\alpha)_N \models \mathrm{KPu} \quad \Longrightarrow \quad \alpha$ ist zulässig .

(b) Das Universum von KPl muß nicht zulässig sein; stattdessen fordern wir in KPl axiomatisch, daß jede Menge Element einer zulässigen Menge ist. Damit gilt dann

$L(\alpha)_N \models \mathrm{KPl} \quad \Longrightarrow \quad \alpha$ ist Limes von zulässigen Mengen .

(c) KPi : KPu + KPl. Unmittelbar aus (a) und (b) folgt also

$L(\alpha)_N \models \mathrm{KPi} \quad \Longrightarrow \quad \alpha$ ist rekursiv unerreichbar .

Ist T eine dieser Theorien, so bezeichnen wir mit W-T bzw. T^r die Theorie, die wir aus T erhalten, wenn wir das Fundierungsschema bzw. das Fundierungsschema und das Schema der vollständigen Induktion auf Δ_0-Formeln einschränken.

Man sieht sofort, daß KPu der Theorie KPU^+ von Barwise entspricht (vgl. [2]), verstärkt um Axiome, die ausdrücken, daß die Urelemente gerade die natürlichen Zahlen sind. Es ist zweckmäßig, jedoch nicht zwingend, von der Menge der natürlichen Zahlen als Urelementmenge auszugehen. Wir erhalten eine äquivalente Theorie, wenn wir auf die Urelemente verzichten und stattdessen die Existenz einer unendlichen Ordinalzahl fordern; das Schema der vollständigen Induktion ist dann ein Spezialfall des Fundierungsschemas.

Die Natürlichkeit von Teilsystemen der Mengenlehre zeigt sich bei der Behandlung von induktiven Definitionen. Während bei ID_1 der Fixpunkt P^A einer positiven arithmetischen Formel $A(U^+,u)$ durch zwei Axiome (P^A1) und (P^A2) eingeführt wird, definiert man sich in KPu mit Hilfe des Σ-Rekursionssatzes die Schichten I_A^α des Fixpunktes P^A durch

$I_A^\alpha := \{x\in\mathbb{N}: A(I_A^{<\alpha},x)\}$, $\quad I_A^{<\alpha} := \bigcup\{I_A^\xi : \xi<\alpha\}$

und setzt dann

$P^A(n) := \exists\xi(n\in I_A^\xi)$.

Wegen der Positivität von A lassen sich mit Σ-Reflexion und Fundierungsschema (P^A1) und (P^A2) in KPu beweisen. Damit ist gezeigt, daß man ID_1 in KPu einbetten kann, wenn man nur $P^A(n)$ geeignet übersetzt. Da $L(\omega_1^{ck})_N \models KPu$ ist, sind alle in KPu beweisbaren Mengen hyperarithmetisch. Man kann somit in KPu die Existenz imprädikativer Mengen nicht beweisen, einige schwach imprädikative Mengen lassen sich jedoch durch Σ_1-Formeln beschreiben. Da wir ID_1 in KPu einbetten können, ist die Imprädikativität dieser Theorie gezeigt. Die Stärke von KPu liegt dabei im Zusammenspiel von Δ_0-Kollektion und Fundierungsschema Nach [17] ist W-KPu prädikativ mit beweistheoretischer Ordinal-

zahl $\phi\varepsilon_0 0$; ersetzen wir das Δ_0-Kollektionsaxion durch die Δ_0-Kollektionsregel, so erhalten wir nach [10] eine prädikative Theorie mit beweistheoretischer Ordinalzahl $\phi\omega 0$.

Bei den Theorien KPl^r, W-KPl und KPl wird das Prinzip der Zulässigkeit iteriert. Dadurch können wir in KPl^r das Axiom ß beweisen und einen Quantorensatz zeigen, der es uns erlaubt, jede Π^1_1-Formel der Analysis uniform in ihren Parametern durch die Beschränkung einer Σ-Formel der Mengenlehre zu beschreiben. Mit Hilfe dieses Quantorensatzes lassen sich dann unmittelbar Systeme der Π^1_1-Analysis einbetten; es gilt:

$(\Pi^1_1\text{-CA})^r \leq KPl^r$

$(\Pi^1_1\text{-CA}) = PA \leq W\text{-KPl}$

$(\Pi^1_1\text{-CA}) + (BI) = GPA \leq KPl$.

Entsprechend werden in KPi die Systeme der Δ^1_2-Analysis behandelt. Wir führen dort das Schema der Δ^1_2-Komprehension mit Hilfe des Quantorensatzes auf das Schema der Δ-Separation zurück, das (bereits in KPu^r) mit Δ_0-Separation und Δ_0-Kollektion bewiesen wird, und erhalten:

$(\Delta^1_2\text{-CA})^r \leq KPi^r$

$(\Delta^1_2\text{-CA}) \leq W\text{-KPi}$

$(\Delta^1_2\text{-CA}) + (BI) \leq KPi$.

Die Theorien KPi, W-KPi und KPi^r haben zwar dieselben Standardmodelle, beim Beweis eines Δ_0-Satzes in W-KPi oder KPi^r wird jedoch nie die Information über das ganze Mengenuniversum ausgenützt. Um dies zu zeigen betten wir W-KPi und KPi^r in ein halbformales System ein, dessen Axiome Σ_1-Formeln sind und in dem das Schema der vollständigen Induktion mit der ω-Regel herleitbar ist. Ähnlich wie in [33] können wir eine schwache

Schnittelimination durchführen. Entsprechendes gilt für KPl, W-KPl, KPl^r und KPu, W-KPu, KPu^r.

Im Teil B, dem Kernstück dieser Arbeit, wird das System RS(Ω) der geschichteten Mengenlehre eingeführt. Es war dabei das Bestreben, dieses System durch Anlehnung an die konstruktible Hierarchie L_N möglichst kanonisch zu entwickeln. Die konstruktible Hierarchie ist vor allem deshalb für unsere Zwecke geeignet, da sie lokal prädikativ ist und nur durch Iteration entlang imprädikativer Wohlordnungen imprädikativ wird.

Wie schon erwähnt, darf man die Kontrolle über die Ordinalzahlen nicht verlieren, so daß die Verwendung eines Ordinalzahlbezeichnungssystems naheliegt. Für unsere Zwecke ist Buchholz' $\bar{\theta}(\Omega)$ geeignet (vgl. [5], [29]), da es sich in der klassischen Ordinalzahltheorie verhältnismäßig natürlich interpretieren läßt.

Beim Aufbau der Syntax von RS(Ω) gehen wir aus von
(a) einer Sprache der Mengenlehre mit ∈-Relation und ohne Mengenkonstanten,
(b) Konstanten $\bar{n}$ für alle natürlichen Zahlen n,
(c) Konstanten M_α für alle $0 < \alpha \in \bar{\theta}(\Omega)$, die als $L(N,\alpha)$ zu interpretieren sind.
Damit werden die Terme von RS(Ω) definiert durch:
(d) $\bar{n}$ und M_α sind Terme der Schichten 0 und α.
(e) Ist $F(u,\underline{v})$ eine Formel, in der höchstens die bezeichneten Variablen frei auftreten, und sind $\underline{a}$ Terme mit Schichten $< \alpha$, so ist $\{x \in M_\alpha : F^{M_\alpha}(x,\underline{a})\}$ ein Term der Schicht α.
Die Formeln von RS(Ω) entstehen dann aus den ursprünglichen Formeln, indem alle freien Variablen durch RS(Ω)-Terme ersetzt werden.

Da das Bezeichnungssystem $\overline{\Theta}(\Omega)$ gegen die Vorgängerrelation nicht abgeschlossen ist (d.h. es gibt $\alpha<\beta\in\overline{\Theta}(\Omega)$ mit $\alpha\notin\overline{\Theta}(\Omega)$), entsprechen sich $L(N,\alpha)$ und die Menge der Terme mit Schichten $<\alpha$ nicht absolut, sondern nur intuitiv. Wir bezeichnen deshalb $RS(\Omega)$ nur als beweistheoretisches Analogon der konstruktiblen Hierarchie. Weil $\overline{\Theta}(\Omega)\cap\Omega_1$ einen Ordinalzahlabschnitt bildet, gilt zumindest für alle $\alpha\in\overline{\Theta}(\Omega)$ mit $\alpha<\Omega_1$ (vgl. Lemma 39):

$L(N,\alpha)\simeq M_\alpha\simeq$ Menge der $RS(\Omega)$-Terme mit Schichten $<\alpha$.

Die Axiome von $RS(\Omega)$ umfassen im wesentlichen die wahren zahlentheoretischen Primformeln. Als Schlußregeln verwenden wir für die Aussagenlogik:

$$\frac{\ldots A\ldots \quad \ldots B\ldots}{A\&B} \qquad \frac{\ldots A_1\ldots}{\ldots A_1\vee A_2\ldots} \qquad \frac{\ldots\neg\neg A\ldots}{\ldots A\ldots}$$

für unbeschränkte Quantoren:

$$\frac{\ldots F(b^\beta)\text{ für alle }b^\beta,\beta<\alpha\ldots}{\ldots\forall x\in N_\alpha F(x)\ldots} \qquad \frac{\ldots F(b^\beta)\text{ für ein }b^\beta,\beta<\alpha\ldots}{\ldots\exists x\in N_\alpha F(x)\ldots}$$

für beschränkte Quantoren:

$$\frac{\ldots\forall x\in N_\alpha(x\in b^\beta\to F(x))\ldots}{\ldots\forall x\in a^\beta F(x)\ldots} \qquad \frac{\ldots\exists x\in N_\alpha(x\in b^\beta\,\&\,F(x))\ldots}{\ldots\exists x\in a^\beta F(x)\ldots}$$

Da wir Schnitte eliminieren wollen, können wir weder Extensionalität noch Gleichheitssätze axiomatisch fordern. Stattdessen definieren wir für Terme mit Schichten $\neq 0$: $a^\alpha=b^\beta$: $\Leftrightarrow\Rightarrow\ \forall x\in a^\alpha(x\in b^\beta)\ \&\ \forall x\in b^\beta(x\in a^\alpha)$. Die Gleichheitssätze werden dann mit Hilfe der folgenden Schlüsse bewiesen, die sich im Zusammenhang mit der konstruktiblen Hierarchie völlig natürlich ergeben:

$$\frac{\ldots\exists x\in M_\beta(a^\alpha=x)\ldots}{\ldots a^\alpha\in M_\beta\ldots} \qquad \frac{\ldots\forall x\in M_\beta(a^\alpha\neq x)\ldots}{\ldots a^\alpha\notin M_\beta\ldots}$$

$$\frac{\ldots\exists x\in M_\beta(a^\alpha=x\ \&\ F(x))\ldots}{\ldots a^\alpha\in\{x\in M_\beta:F(x)\}\ldots} \qquad \frac{\ldots\forall x\in M_\beta(a^\alpha\neq x\vee\neg F(x))\ldots}{\ldots a^\alpha\notin\{x\in M_\beta:F(x)\}\ldots}$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, ist das System bisher vollständig prädikativ; mit Ausnahme von Δ_0-Kollektion lassen sich z.B. alle Axiome von KPu darin interpretieren. Bis jetzt haben wir aber noch nicht ausgenützt, daß $L(N,\kappa)$ für jede zulässige Ordinalzahl κ unter Δ_0-Kollektion abgeschlossen ist. Um auch diese Eigenschaft in RS(Ω) widerzuspiegeln, nehmen wir für alle zulässigen Ordinalzahlen κ, alle $\alpha<\kappa$ und alle RS(Ω)-Formeln F, in denen keine Terme mit Schichten $\geq\kappa$ auftreten, folgende Abschlußregeln (Clκ) hinzu:

$$\frac{\ldots\forall x\in a^\alpha\exists y\in M_\kappa F(x,y)\ldots}{\ldots\exists z\in M_\kappa\forall x\in a^\alpha\exists y\in z F(x,y)\ldots}$$

Mit dieser Regel wird das geschichtete System dann imprädikativ, formal gesehen dadurch, daß wir von einer Σ-Formel auf eine (weniger komplexe) Σ_1-Formel schließen.

Indem wir das Reduktionsverfahren, das W. Pohlers in [25], [27] und [28] zur Behandlung unendlicher Systeme monotoner induktiver Definitionen entwickelt hat, auf den mengentheoretischen Fall übertragen, können wir für RS(Ω) Schnitteliminationssätze beweisen. Die Schwierigkeit besteht darin, einen Schnitt

$$\frac{\ldots A\ldots \quad \ldots A\to B\ldots}{\ldots B\ldots}$$

abzubauen, dessen Schnittformel A durch einen (imprädikativen) Schluß (Clκ) gewonnen wurde. Durch Ausnutzung der

tiefliegenden Kollabierungs- und Begrenzungseigenschaften von RS(Ω) (vgl. die gleichlautenden Sätze in Teil B) kommen wir jedoch zum Ziel und können zeigen, daß sich jeder in RS(Ω) herleitbare arithmetische Satz schnittfrei - und damit umweglos - beweisen läßt.

Die in Teil B bereitgestellten Mittel verwenden wir in Teil C, um die Ordinalzahlanalyse von KPu, KPi^r und W-KPi genau auszuführen. Die Behandlung von KPl und W-KPl sowie die Verallgemeinerung dieser Methoden zur Untersuchung von KPi werden angedeutet. Im einzelnen erhalten wir:

(1) $|KPu| = |ID_1| = \overline{\theta}\varepsilon_{\Omega_1+1}0$

(2) $|KPi^r| = |KPl^r| = |(\Delta^1_2\text{-CA})^r| = |(\Pi^1_1\text{-CA})^r| = |ID_{<\omega}| = \overline{\theta}\Omega_\omega 0$

(3) $|W\text{-}KPl| = |(\Pi^1_1\text{-CA})| = |PA| = |W\text{-}ID_\omega| = \overline{\theta}(\Omega_\omega\varepsilon_0)0$

(4) $|KPl| = |(\Pi^1_1\text{-CA}) + (BI)| = |GPA| = |ID_\omega| = \overline{\theta}\varepsilon_{\Omega_\omega+1}0$

(5) $|W\text{-}KPi| = |(\Delta^1_2\text{-CA})| = \overline{\theta}\Omega_{\varepsilon_0}0$.

Da KPu und das System $S_2(\infty) + TI(\epsilon)$ von [10] beweistheoretisch äquivalent sind, ist nach (1) Fefermans Frage nach der Stärke von $S_2(\infty) + TI(\epsilon)$ beantwortet. In [14] wurde von Feferman mit Hilfe rekursiv saturierter Modelle gezeigt, daß $(\Delta^1_2\text{-CA})^r$ eine konservative Erweiterung von $(\Pi^1_1\text{-CA})^r$ ist; nach (2) und [26] ist dieses Ergebnis jetzt auch auf rein syntaktischem Wege gezeigt.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich bei meiner Arbeit unterstützt haben. Besonders danke ich Herrn Professor K. Schütte für die Vergabe des Themas dieser Arbeit und die Förderung meines Promotionsvorhabens, für

stete Ermutigungen sowie für alles, was ich von ihm lernen konnte. Besonders danke ich auch Herrn Dr. W. Buchholz für seine ständige Gesprächsbereitschaft sowie für seine Hilfe und Ratschläge bei der Arbeit mit seinem Ordinalzahlbezeichnungssystem. Vor allem aber möchte ich Herrn Dr. W. Pohlers herzlich danken für die Anregung zu dieser Arbeit, für wertvolle Hinweise während ihrer Abfassung und dafür, daß ich den gesamten Themenkreis eingehend mit ihm besprechen konnte.

Technische Bemerkungen:

Die Sätze und Lemmata sind fortlaufend numeriert. Die Symbole $\in$ und $=$ werden je nach Zusammenhang objektsprachlich oder metasprachlich verwendet.

Teil A. Theorien für zulässige Mengen

1. Syntaktische und semantische Grundbegriffe

1.1. Die formale Sprache

Wir verwenden die Sprache $L^* = L(\in, M, Ad)$ der Mengenlehre mit folgenden Grundzeichen:

1. Die Konstante N für die Menge der natürlichen Zahlen und die Konstanten $\bar{n}$ für die natürlichen Zahlen n.
2. Für jede prim.rek. Relation Z die gleichstellige Relationskonstante R_Z; die Konstanten für die arithmetische Gleichheits- und Nachfolgerrelation schreiben wir als $=$ und Su.
3. Die 1-stellige Relationskonstante U, die als Relation auf den natürlichen Zahlen zu interpretieren ist.
4. Die 2-stellige Relationskonstante $\in$ sowie die 1-stelligen Relationskonstanten M für Mengen und Ad für zulässige Mengen.
5. Je abzählbar unendlich viele freie und gebundene Variablen.
6. Die logischen Symbole &, v, $\forall$, $\exists$.
7. Runde Klammern, Komma und Querstrich.

Die Konstante N, die Konstanten $\bar{n}$ und die freien Variablen nennen wir Terme. Nennformen werden in üblicher Weise gebraucht und mit den Skriptbuchstaben $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ bezeichnet; A, B, C verwenden wir für Nennformen, in denen keine freien Variablen auftreten.

Definition der Formeln A und ihrer Länge ln(A)

1. Ist R eine n-stellige Relationskonstante ($n \geq 1$) und sind $a_1, \ldots a_n$ Terme , so sind $R(a_1, \ldots a_n)$ und $\bar{R}(a_1, \ldots a_n)$ Formeln der Länge 1; $\bar{R}$ dient als Negation von R.
2. Sind A und B Formeln, so sind (A&B) und (AvB) Formeln der Länge $\max\{ln(A), ln(B)\}+1$.

3. Ist $F(u)$ eine Formel und x eine gebundene Variable, die nicht in $F(u)$ auftritt, so sind $\forall x F(x)$ und $\exists x F(x)$ Formeln der Länge $ln(F(u))+1$.

4. Ist a ein Term, $F(u)$ eine Formel und x eine gebundene Variable, die nicht in $F(u)$ auftritt, so sind $\forall x \in a F(x)$ und $\exists x \in a F(x)$ Formeln der Länge $ln(F(u))+2$.

Formeln der Länge 1 heißen Primformeln; eine Formel, in der keine freien Variablen auftreten, nennen wir einen Satz.

Als Mitteilungszeichen (auch mit Indizes) verwenden wir

u, v, w	für freie Variablen,
s, x, y, z	für gebundene Variablen,
a, b, c, d, e, f, g	für Terme,
A, B, C	für Formeln.

Unterstrichene Mitteilungszeichen (z.B. $\underline{u}$) werden als abkürzende Schreibweise für endliche Folgen der entsprechenden Mitteilungszeichen (z.B. $u_1,\ldots u_n$) verwendet; die Länge einer solchen Folge ergibt sich immer aus dem Zusammenhang.

Definition der Negation $\neg A$ einer Formel A

1. $\neg R(\underline{a}) := \overline{R}(\underline{a})$ und $\neg \overline{R}(\underline{a}) := R(\underline{a})$ für Primformeln $R(\underline{a})$, $\overline{R}(\underline{a})$.
2. $\neg(A\&B) := (\neg A \vee \neg B)$ und $\neg(A \vee B) := (\neg A \& \neg B)$.
3. $\neg\forall x F(x) := \exists x \neg F(x)$ und $\neg\exists x F(x) := \forall x \neg F(x)$.
4. $\neg\forall x \in a F(x) := \exists x \in a \neg F(x)$ und $\neg\exists x \in a F(x) := \forall x \in a \neg F(x)$.

Folgerung

Es ist $\neg\neg A = A$ und $ln(\neg A) = ln(A)$.

Wir schreiben $(a \in b)$, $(a \notin b)$, $(a \equiv b)$ und $(a \not\equiv b)$ für $\in(a,b)$, $\overline{\in}(a,b)$, $\equiv(a,b)$ und $\overline{\equiv}(a,b)$; außerdem lassen wir bei Formeln in der Regel die äußeren Klammern fort.

Bezeichnung

1. Ist A eine Formel und a ein Term, so sei A^a diejenige Formel, die sich aus A ergibt, wenn jeder in A auftretende unbeschränkte Quantor $\forall x$ bzw. $\exists x$ durch $\forall x \in a$ bzw. $\exists x \in a$ ersetzt wird. wir schreiben $F^a(\underline{b})$ für $F(\underline{b})^a$.

2. Sind $F(U)$ sowie $G(v)$ Formeln und ist r ein Term oder eine gebundene Variable, so bezeichne $F(G)$ bzw. $F(r)$ diejenige Zeichenreihe, die aus $F(U)$ entsteht, wenn wir darin jede Teilformel $U(.)$ durch $G(.)$ bzw. $(.\in r)$ und jede Teilformel $\overline{U}(.)$ durch $\neg G(.)$ bzw. $(.\notin r)$ ersetzen.

Definition

1. $A \to B := \neg A \vee B$ und $A \leftrightarrow B := (A \to B) \& (B \to A)$.

2. $Tran(a) := M(a) \& \forall x \in a \forall y \in x (y \in a)$.

3. $(a=b) := ((\overline{M}(a) \& \overline{M}(b)) \& a \equiv b) \vee ((M(a) \& M(b)) \& (\forall x \in a (x \in b) \& \forall x \in b (x \in a)))$.

4. $(a \neq b) := \neg (a=b)$.

5. $Ord(a) := Tran(a) \& \forall x \in a \forall y \in a (x \in y \vee x = y \vee y \in x)$.

Definition der Σ- und Π-Formeln

1. Jede Primformel ist eine Σ-Formel und eine Π-Formel.

2. A&B und AvB sind genau dann Σ-Formeln (Π-Formeln), wenn A und B Σ-Formeln (Π-Formeln) sind.

3. $\forall x \in a F(x)$ und $\exists x \in a F(x)$ sind genau dann Σ-Formeln (Π-Formeln), wenn $F(u)$ eine Σ-Formel (Π-Formel) ist.

4. $\exists x F(x)$ ($\forall x F(x)$) ist genau dann eine Σ-Formel (Π-Formel), wenn $F(u)$ eine Σ-Formel (Π-Formel) ist; $\exists x F(x)$ ($\forall x F(x)$) ist keine Π-Formel (Σ-Formel).

Eine Formel ist eine $\underline{\Delta_0\text{-Formel}}$, wenn sie sowohl eine Σ-Formel als auch eine Π-Formel ist; wir nennen eine Formel A eine $\underline{\Sigma_1\text{-Formel}}$

bzw. Π_1-Formel, wenn A eine Δ_0-Formel ist oder die Form $\exists x F(x)$ bzw. $\forall x F(x)$ hat, wobei $F(u)$ eine Δ_0-Formel ist.

Bei allen formalen Mengentheorien, die wir später betrachten werden, verwenden wir als weitere Mitteilungszeichen:

α, β, γ für freie Ordinalzahlvariablen,

ζ, η, ξ für gebundene Ordinalzahlvariablen.

Es steht dann (z.B.) $\forall \xi F(\xi)$ für $\forall x(Ord(x) \to F(x))$ und $\exists \xi F(\xi)$ für $\exists x(Ord(x) \& F(x))$.

Eine aussagenlogische Belegung ist eine Abbildung b, die jeder Formel einen Wert 0 oder 1 zuordnet und die folgenden Bedingungen erfüllt: $b(\neg A) = 1 - b(A)$, $b(A \& B) = \min\{b(A), b(B)\}$ und $b(A \vee B) = \max\{b(A), b(B)\}$. Wir sagen, daß eine Formel aussagenlogisch gültig ist, wenn sie bei jeder aussagenlogischen Belegung den Wert 1 erhält.

1.2. Die Basisaxiome

Alle formalen Mengensysteme, die wir in diesem Teil einführen werden, umfassen die Zahlentheorie mit dem Schema der vollständigen Induktion für Δ_0-Formeln. Sie haben eine Reihe von Axiomen gemeinsam, die in den folgenden Basisaxiomen zusammengefaßt sind.

Logische Axiome:

A , wenn A aussagenlogisch gültig ist.

$\forall x F(x) \to F(b)$

$\forall x (F(x) \to [b \in a \to F(b)])$

Gleichheitsschema:

$a = b \to (F(a) \to F(b))$

Schwaches Fundierungsschema:

$Tran(a) \& \forall x \in a(\forall y \in x F(y) \to F(x)) \to \forall x \in a F(x)$, wenn $F(u)$ eine Δ_0-Formel ist.

Ontologische Axiome:

$\overline{M}(\bar{n})$ für jede natürliche Zahl n.

$a \in N \leftrightarrow \overline{M}(a)$

$b \in a \rightarrow M(a)$

$R_Z(a_1,\ldots a_n) \rightarrow \overline{M}(a_1)\&\ldots\overline{M}(a_n)$

$U(a) \rightarrow \overline{M}(a)$

Zahlentheoretische Axiome:

Definitionsformeln für die prim.rek. Relationen sowie das schwache Schema der vollständigen Induktion

$F(\bar{0}) \,\&\, \forall x \in N \forall y \in N(F(x)\&Su(x,y) \rightarrow F(y)) \rightarrow \forall x \in N F(x)$, wenn $F(u)$ eine Δ_0-Formel ist.

Außerdem verwenden wir bei den formalen Mengensystemen die

Grundschlußregeln:

A und $A \rightarrow B \vdash B$

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow F(u) \vdash A \rightarrow \forall x F(x) \\ A \rightarrow (u \in a \rightarrow F(u)) \vdash A \rightarrow \forall x \in a F(x) \end{array}\right\} \text{ mit Variablenbedingung}$$

Ist T eine formale Theorie, so bedeutet $T \vdash A$, daß sich A mit den Axiomen und Grundschlußregeln von T erschließen läßt.

1.3. Die relative konstruktible Hierarchie

Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Wir nennen ein Paar $\mathcal{U} = \langle \mathbb{N}, W_U \rangle$ eine Standardstruktur der natürlichen Zahlen, wenn W_U eine Abbildung ist, die der Relationskonstante U eine Relation auf $\mathbb{N}$ und jeder Konstante R_Z die prim.rek. Relation Z zuordnet. Wenn U auf die leere Menge abgebildet wird, bezeichnen wir die entsprechende Standardstruktur mit $\mathcal{N}$ (es ist für das Folgende nur wesentlich, U eine hyperarithmetische Menge zuzuordnen).

Da wir Theorien mit den natürlichen Zahlen als Urelementen untersuchen, errichten wir das mengentheoretische Universum nicht über

der leeren Menge, sondern über $\mathbb{N}$ (vgl. [2]). Wir definieren:

$V_{\mathbb{N}}(0)$:= leere Menge

$V_{\mathbb{N}}(\sigma+1)$:= Potenzmenge von $(\mathbb{N} \cup V_{\mathbb{N}}(\sigma))$

$V_{\mathbb{N}}(\lambda)$:= $\cup \{V_{\mathbb{N}}(\sigma) : \sigma<\lambda\}$, wenn λ eine Limeszahl ist

$V_{\mathbb{N}}$:= $\cup \{V_{\mathbb{N}}(\sigma) : \sigma \in On\}$

Wie in der Einleitung ausgeführt wurde, ist dieses Universum für beweistheoretische Untersuchungen ungeeignet. Stattdessen definieren wir über jeder Standardstruktur der natürlichen Zahlen $\mathcal{U}$ folgende relative konstruktible Hierarchie $L_{\mathcal{U}}$:

$L(\mathcal{U},0)$:= leere Menge

$L(\mathcal{U},1)$:= $\mathbb{N}$

$L(\mathcal{U},\sigma+1)$:= Kollektion der Mengen, die in der Sprache L^* über $L(\sigma)_{\mathcal{U}}$ definierbar sind

$L(\mathcal{U},\lambda)$:= $\cup \{L(\mathcal{U},\sigma) : \sigma<\lambda\}$, wenn λ eine Limeszahl ist

$Ad(\sigma)_{\mathcal{U}}$:= $\{L(\mathcal{U},\tau) : \tau<\sigma$ und τ Limeszahl und $L(\tau)_{\mathcal{U}} \models \Delta_0\text{-Koll}\}$

$L(\sigma)_{\mathcal{U}}$:= $\langle \mathbb{N}, L(\mathcal{U},\sigma) \cap \mathbb{N}, \in, Ad(\sigma)_{\mathcal{U}}, \mathcal{U}_{\mathcal{U}} \rangle$

$L(\mathcal{U})$:= $\cup \{L(\mathcal{U},\sigma) : \sigma \in On\}$

Eine analoge Art der relativen konstruktiblen Hierarchie und ihre Eigenschaften sind in [2] ausführlich dargestellt. Dort werden allerdings die konstruktiblen Mengen mit Hilfe von Mengenfunktionen erhalten und nicht durch Iteration der Definierbarkeit entlang den Ordinalzahlen. Beide Ansätze unterscheiden sich jedoch nur unwesentlich.

2. Die Theorie KPu

2.1. Die Axiome von KPu

Die formale Theorie KPu ist formuliert in der Sprache L^*; neben den Basisaxiomen hat KPu folgende weitere Axiome:

(Paarmenge)
$\exists z(a\in z \,\&\, b\in z)$

(Vereinigungsmenge)
$\exists z\forall x\in a\forall y\in x(y\in z)$

(Δ_0-Separation)
$\exists z(M(z) \,\&\, \forall x(x\in z \leftrightarrow x\in a \,\&\, F(x)))$, wenn $F(u)$ eine Δ_0-Formel ist.

(Δ_0-Kollektion)
$\forall x\in a\exists y F(x,y) \rightarrow \exists z\forall x\in a\exists y\in z F(x,y)$, wenn $F(u,v)$ eine Δ_0-Formel ist.

(Fundierungsschema)
$\forall x(\forall y\in x F(y)\rightarrow F(x)) \rightarrow \forall x F(x)$

(Induktionsschema)
$F(\bar{0}) \,\&\, \forall x\in N\forall y\in N(F(x) \,\&\, Su(x,y) \rightarrow F(y)) \rightarrow \forall x\in N F(x)$

KPu entspricht Barwises Theorie KPU^+, verstärkt um Axiome, die ausdrücken, daß die Urelemente gerade die natürlichen Zahlen sind. Nach [2] lassen sich daher in KPu beweisen: Σ-Reflexion, Δ-Separation und vor allem der Σ-Rekursionssatz.

$L(\omega_1^{ck})_N$ ist das minimale Standardmodell von KPu. ω und alle Ordinalzahlen α mit $L(\alpha)_N \models KPu$ sind die zulässigen Ordinalzahlen; sie werden durch die Funktion τ aufgezählt.

Wir übernehmen im folgenden die Terminologie von [2]; mit D-KPu wird der Abschluß von KPu unter definitorischen Erweiterungen durch Σ-Funktionssymbole und Δ-Relationssymbole bezeichnet. Nach [2] erhalten wir:

Satz 1

(a) Jeder Formel A aus der Sprache von D-KPu kann man eine Formel A_0 aus der Sprache von KPu mit denselben freien Variablen so zuordnen, daß gelten: (i) $D\text{-}KPu \vdash A\leftrightarrow A_0$.
(ii) Ist A eine Σ-Formel, so ist auch A_0 eine Σ-Formel.
(b) D-KPu ist eine konservative Erweiterung von KPu.

2.2. Induktive Definitionen in KPu

Definition

Eine Formel A aus der Sprache L^* heiße positiv in U, wenn sie keine Teilformel $\neg\dot{U}(a)$ besitzt. $L_0(U^+,\underline{u})$ sei die Menge aller Δ_0-Formeln $\dot{A}(U,\underline{u})$, die positiv in U sind.

Wir werden zeigen, daß man in D-KPu - und damit wegen Satz 1 auch in KPu - den kleinsten Fixpunkt einer induktiven Definition über N mit Definitionsklausel aus $L_0(U^+,u)$ durch eine Σ_1-Formel beschreiben kann. Mit Hilfe des Σ-Rekursionssatzes definieren wir in D-KPu die Stufen einer solchen induktiven Definition.

Satz 2

(a) Ist $\dot{A}(v,u)$ eine Δ_0-Formel, so gibt es ein Σ-Funktionssymbol I_A mit:

$$D\text{-}KPu \vdash \forall\xi(I_A^\xi = \{x\in N:\dot{A}(\bigcup_{\eta<\xi} I_A^\eta, x)\}) .$$

(b) Ist $\dot{A}(U,u)$ eine Formel aus $L_0(U^+,u)$, so gibt es ein Σ-Funktionssymbol I_A mit:

$$D\text{-}KPu \vdash \forall\xi(I_A^\xi = \{x\in N:\dot{A}(\exists\eta<\xi(\cdot\in I_A^\eta), x)\}) .$$

Beweis:

(a) Setzen wir

$$F(u,v,w) := (\neg Ord(u)\&w=\emptyset) \vee (Ord(u)\&w=\{x\in N:\dot{A}(Urange(v),x)\}) ,$$

so ist $F(u,v,w)$ eine Σ-Formel mit $D\text{-}KPu \vdash \forall x,y\exists!z F(x,y,z)$. Nach dem Σ-Rekursionssatz (vgl. [2]) gibt es also ein Σ-Funktionssymbol I_A mit $D\text{-}KPu \vdash \forall x F(x,\{\langle y,I_A^y\rangle : y\in TC(x)\},I_A^x)$. Daraus folgt die Behauptung.

(b) ist eine unmittelbare Folgerung aus (a).

Definition

Jeder Formel $A(U,u)$ aus $L_0(U^+,u)$ werde genau ein Σ-Funktionssymbol I_A zugeordnet, das S2(b) erfüllt; dann sei

$P_A(a) :\Leftrightarrow \exists\xi(a\in I_A^\xi)$.

Satz 3

Ist $A(U,u)$ aus $L_0(U^+,u)$, so gilt:

(a) $\text{D-KPu}\vdash \forall x\in N(A(P_A,x)\to P_A(x))$

(b) $\text{D-KPu}\vdash \forall x\in N(A(F,x)\to F(x))\to \forall x\in N(P_A(x)\to F(x))$ für jede Formel $F(v)$ aus der Sprache von D-KPu.

Beweis:

(a) Wegen der U-Positivität ist $A(P_A,u)$ eine Σ-Formel; daher folgt mit Σ-Reflexion (vgl. [2])

$\text{D-KPu}\vdash u\in N \,\&\, A(P_A,u)\to \exists\eta(u\in N \,\&\, A(\exists\xi<\eta(.\in I_A^\xi),u))$

und daraus mit S2(b)

$\text{D-KPu}\vdash u\in N \,\&\, A(P_A,u)\to \exists\eta(u\in I_A^\eta)$, also auch

$\text{D-KPu}\vdash \forall x\in N(A(P_A,x)\to P_A(x))$.

(b) Es sei $F(v)$ eine beliebige Formel aus der Sprache von D-KPu; wir setzen

$B := \forall x\in N(A(F,x)\to F(x))$ und $G(\alpha) := B\to \forall x\in N(x\in I_A^\alpha\to F(x))$.

Es ist zu zeigen: $\text{D-KPu}\vdash \forall\xi G(\xi)$. Unter Ausnutzung der U-Positivität von $A(U,u)$ läßt sich dies mit S2(b) sehr leicht durch transfinite Induktion nach ξ beweisen.

2.3. Einbettung von ID_1 in KPu

ID_1 ist formuliert in der Sprache der Zahlentheorie mit zusätzlichen Konstanten P^A für alle U-positiven arithmetischen Formeln $A(U,u)$, in denen außer u keine freie Variable auftritt. Die Axiome von ID_1 sind die Axiome der Zahlentheorie mit dem Schema der vollständigen Induktion sowie für jede Konstante P^A:

(P^A1) $\forall x(A(P^A,x) \to F^A,x)$,

(P^A2) $\forall x(A(F,x) \to F(x)) \to \forall x(P^A(x) \to F(x))$ für jede Formel $F(u)$.

Die Theorie ID_1 ist ausführlich dargestellt etwa in [5], [9], [20], [26] und [29].

ID_1 soll in KPu eingebettet werden. Dazu müssen wir zuerst die Sprache von ID_1 der Sprache von KPu oder D-KPu anpassen. L^* umfaßt die Sprache der Zahlentheorie; S3 legt die Übersetzung der Konstanten P^A nahe.

Definition der Übersetzung F' einer ID_1-Formel F

1. Tritt in F keine Konstante P^A auf, so sei $F' := F^N$.
2. $P^A(a)' := P_B(a)$ und $\overline{P^A}(a)' := \neg P_B(a)$, wobei wir $B(U,u) := A^N(U,u)$ setzen,
3. In allen anderen Fällen wird definiert
3.1. $(F_1 \& F_2)' := F_1' \& F_2'$ und $(F_1 \vee F_2)' := F_1' \vee F_2'$.
3.2. $\forall x F(x)' := \forall x \in N F'(x)$ und $\exists x F(x)' := \exists x \in N F'(x)$.

Satz 4 (Interpretationssatz)

Ist $A(\underline{u})$ eine in ID_1 herleitbare Formel, so gilt

$D\text{-KPu} \vdash \forall \underline{x} \in N A'(\underline{x})$.

Beweis durch Herleitungsinduktion:

Die Übersetzungen der Axiome (P^A1) und (P^A2) sind in D-KPu nach S3 beweisbar, die Übersetzungen der anderen Axiome folgen unmittelbar aus den Axiomen von D-KPu; bei komplexeren Herleitungen folgt die Behauptung mit der IV.

Folgerung

(a) ID_1 läßt sich in KPu einbetten.

(b) KPu ist ein imprädikatives Teilsystem der Mengenlehre.

3. Die Theorien KPl^r, W-KPl und KPl

3.1. Die Axiome von KPl^r, W-KPl und KPl

Bei den formalen Theorien KPl^r, W-KPl und KPl, die wie KPu in der Sprache L^* formuliert sind, kommt die Relationskonstante Ad zum Tragen. Die Axiome von KPl^r sind die Basisaxiome sowie

(Ad1)
$Ad(a) \rightarrow Tran(a) \,\&\, N\in a$

(Ad2)
$Ad(a) \,\&\, Ad(b) \rightarrow a\in b \vee a=b \vee b\in a$

(Ad3 relative Paarmenge)
$Ad(a) \rightarrow \forall x\in a \forall y\in a \exists z\in a(x\in z \,\&\, y\in z)$

(Ad4 relative Vereinigungsmenge)
$Ad(a) \rightarrow \forall x\in a \exists z\in a \forall y\in x \forall s\in y(s\in z)$

(Ad5 relative Δ_0-Separation)
$Ad(a) \rightarrow \forall \underline{z}\in a \exists y\in a(M(y) \,\&\, \forall x\in a(x\in y \leftrightarrow x\in z_1 \,\&\, A(x,\underline{z})))$, wenn $A(v,\underline{u})$ eine Δ_0-Formel und $\underline{u} = u_1,\ldots u_n$ ist.

(Ad6 relative Δ_0-Kollektion)
$Ad(a) \rightarrow \forall \underline{z}\in a(\forall x\in z_1 \exists y\in a A(x,y,\underline{z}) \rightarrow \exists s\in a \forall x\in z_1 \exists y\in s A(x,y,\underline{z}))$, wenn $A(v,w,\underline{u})$ eine Δ_0-Formel und $\underline{u} = u_1,\ldots u_n$ ist.

(Lim)
$\forall x \exists y(Ad(y) \,\&\, x\in y)$

W-KPl ist die Theorie KPl^r + (IS); mit KPl bezeichnen wir die Theorie W-KPl + (FS). Dabei verstehen wir unter (IS) bzw. (FS) das Schema der vollständigen Induktion bzw. das Fundierungsschema

(IS) $F(\bar{0}) \,\&\, \forall x\in N \forall y\in N(F(x) \,\&\, Su(x,y) \rightarrow F(y)) \rightarrow \forall x\in N F(x)$

(FS) $\forall x(\forall y\in x F(y) \rightarrow F(x)) \rightarrow \forall x F(x)$,

jeweils für beliebige Formeln $F(u)$.

$L(\alpha)_N$ ist ein Modell von KPl^r, W-KPl oder KPl genau dann, wenn $\alpha = \sup\{\tau_\xi : \xi<\lambda\}$ für eine Limeszahl λ ist; $Ad(a)$ gilt in diesem

Modell für alle $a = L(N,\tau_\xi)$ mit $0<\xi<\lambda$. Die Axiome von KPl^r sind so angelegt, daß man in jeder zulässigen Menge arbeiten kann wie in KPu; das Schema der vollständigen Induktion und das Fundierungsschema gelten für alle Formeln A^a aufgrund des schwachen Schemas der vollständigen Induktion und des schwachen Fundierungsschemas. Man überzeugt sich leicht vom folgenden

Lemma 1

$KPu \vdash A(\underline{u}) \quad ==\Rightarrow \quad KPl^r \vdash Ad(a) \rightarrow \forall \underline{x}\in a A^a(\underline{x})$.

Lemma 2 (Definition durch Σ-Rekursion)

Ist $B(\underline{u},v_1,v_2,w)$ eine Σ-Formel mit der Eigenschaft

$KPl^r \vdash Ad(a) \rightarrow \forall \underline{x},\xi,y\in a \exists! z\in a B^a(\underline{x},\xi,y,z)$,

so gibt es eine Σ-Formel $A(\underline{u},v,w)$, für die gilt:

(a) $KPl^r \vdash Ad(a) \rightarrow \forall \underline{x},\xi\in a \exists! z\in a A^a(\underline{x},\xi,z)$

(b) $KPl^r \vdash Ad(a) \,\&\, \underline{u},\alpha\in a \,\&\, v=\{<\xi,y>:\xi<\alpha \,\&\, A^a(\underline{u},\xi,y)\} \rightarrow$

$(A^a(\underline{u},\alpha,w) \leftrightarrow B^a(\underline{u},\alpha,v,w))$

Beweis:

Es sei $C(\underline{u},v,w,f)$ die Σ-Formel

$Ord(v) \,\&\, Fun(f) \,\&\, dom(f)=v \,\&\, B(\underline{u},v,f,w) \,\&\, \forall \xi\in v B(\underline{u},\xi,f\restriction\xi,f(\xi))$.

Dann setzen wir $A(\underline{u},v,w) := \exists x C(\underline{u},v,w,x)$ und beweisen damit L2 mit Hilfe von L1 analog zum Σ-Rekursionssatz in [2].

Bemerkung

L2 besagt, daß wir unter den gegebenen Voraussetzungen uniform für jede zulässige Menge a und alle Parameter $\underline{c}$ aus a eine Funktion f so definieren können, daß $B^a(\underline{c},f\restriction\alpha,f(\alpha))$ für alle α aus der zulässigen Menge a gilt.

3.2. Induktive Definitionen in KPl^r

Wie in 2. wollen wir auch hier den kleinsten Fixpunkt einer induktiven Definition mit positiver Δ_0-Definitionsklausel betrachten. Sind alle Parameter einer solchen induktiven Definition in der zulässigen Menge a enthalten, so ist der kleinste Fixpunkt ein Element der nächsten zulässigen Menge. Da uns in KPl^r nur das schwache Fundierungsschema zur Verfügung steht, können wir die transfinite Induktion über diesen Fixpunkt nicht für beliebige Formeln beweisen.

Satz 5

Ist $B(U,\underline{u},v)$ aus $L_0(U^+,\underline{u},v)$, so gibt es eine Σ-Formel $\tilde{B}(\underline{u},v,w)$, für die bei $\underline{u} = u_1,\ldots u_n$ gilt:

(a) $KPl^r \vdash Ad(a) \to \forall \underline{x},\xi\in a \exists! z\in a \tilde{B}^a(\underline{x},\xi,z)$

(b) $KPl^r \vdash Ad(a) \,\&\, \underline{u},\alpha\in a \,\&\, v = U\{y\in a : \exists \xi<\alpha \tilde{B}^a(\underline{u},\xi,y)\} \to$

$$\tilde{B}^a(\underline{u},\alpha,w) \leftrightarrow w = \{x\in c_1 : B(v,\underline{u},x)\} \quad .$$

Beweis mit L2; vgl. Beweis von S2.

Definition

Jeder Formel $B(U,\underline{u},v)$ aus $L_0(U^+,\underline{u},v)$ werde genau eine Σ-Formel $\tilde{B}(\underline{u},v,w)$ zugeordnet, die S5 erfüllt; dann sei

$$Q_B(\underline{a},b) := \exists\xi\exists y(\tilde{B}(\underline{a},\xi,y) \,\&\, b\in y) \quad .$$

Satz 6

Ist $B(U,\underline{u},v)$ aus $L_0(U^+,\underline{u},v)$, so gilt bei $\underline{c} = c_1,\ldots c_n$:

(a) $KPl^r \vdash Ad(a) \,\&\, \underline{c}\in a \to \forall x\in c_1 (B(Q_B^a(\underline{c},.),\underline{c},x) \to Q_B^a(\underline{c},x))$

(b) $KPl^r \vdash Ad(a) \,\&\, \underline{c}\in a \,\&\, \forall x\in c_1 (B(F,\underline{c},x) \to F(x)) \to$

$$\forall x\in c_1 (Q_B^a(\underline{c},x) \to F(x))$$

für jede Δ_0-Formel $F(u)$.

Beweis mit L1 und S5 analog zum Beweis von S3.

3.3. Das Axiom β

Definition

1. $Wf(a,b) := b \subset a \times a \;\&\; \forall x(x \subset a \;\&\; x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \forall z \in x(\langle z,y\rangle \notin b))$.

2. Unter dem Axiom β (Aβ) verstehen wir den Allabschluß der folgenden Formel:

$Wf(a,b) \rightarrow \exists s(Fun(s) \;\&\; dom(s)=a \;\&\; \forall x \in a(s(x)=\{s(y):y \in a \;\&\; \langle y,x\rangle \in b\}))$.

Barwise zeigt in [2], daß man in KPU + (Σ_1-Separation) das Axiom β herleiten kann. Dabei benötigt man (Σ_1-Separation) nur, um zu zeigen, daß a unter der Voraussetzung Wf(a,b) der erreichbare Teil von b ist; dies geht bereits in $KP1^r$.

Satz 7

$KP1^r \vdash (A\beta)$.

Beweis:

Wir arbeiten informal in $KP1^r$. Es sei Wf(a,b). Nach (Lim) gibt es zulässige Mengen d, d_0 mit $a,b \in d \in d_0$. Wir definieren

$\mathcal{B}(U,u,v,w) := \forall x \in u(\langle x,w\rangle \in v \rightarrow U(x))$.

Dann ist $c := \{x \in a : Q_{\mathcal{B}}^{d}(a,b,x)\}$ nach (Δ_0-Separation) ^{d_0} eine Menge aus d_0. Wegen Wf(a,b) folgt mit S6(a) sofort a=c.

Wir setzen für alle $e \in a$:

$g(e) := \min\{\xi \in d : \exists y \in d(\tilde{\mathcal{B}}^{d}(a,b,\xi,y) \;\&\; e \in y)\}$,

$\gamma := \sup\{g(x)+1 : x \in a\}$.

Der Rest des Beweises wird von [2,S.40] übernommen. Man definiert f_α, für $\alpha<\gamma$, durch Rekursion nach α: f_α ist die Funktion mit $dom(f_\alpha) = \{x \in a : g(x) \leq \alpha\}$ und $f_\alpha(x) = \{f_\xi(y) : \xi<\alpha \;\&\; g(y) \leq \xi \;\&\; \langle y,x\rangle \in b\}$ für alle x mit $g(x) \leq \alpha$. Diese Funktionen sind ansteigend ($\alpha<\beta<\gamma \rightarrow f_\alpha \subset f_\beta$) und $f := \cup\{f_\alpha : \alpha<\gamma\}$ ist die gesuchte Funktion.

Satz 8 (Folgerung)

$KP1 \vdash Wf(a,b) \,\&\, \forall x{\in}a(\forall y{\in}a(<y,x>{\in}b \to F(y)) \to F(x)) \to \forall x{\in}aF(x)$

für jede Formel $F(u)$.

Beweis mit S7 und dem vollen Fundierungsschema.

3.4. Der Quantorensatz

Mit Hilfe des folgenden Quantorensatzes lassen sich Teilsysteme der Analysis bequem in Teilsysteme der Mengenlehre einbetten; er ermöglicht es uns nämlich, Π^1_1-Formeln der Analysis uniform in ihren Parametern auf Δ_0-Formeln der Mengenlehre zurückzuführen. Wir nützen dabei wesentlich aus, daß jede Π^1_1-Formel der Analysis äquivalent ist zu der Wohlfundiertheit einer arithmetisch definierbaren Relation auf N.

Definition

Es sei T eine in der Sprache L^* formulierte Theorie der Mengenlehre. Wir nennen dann eine Formel $A(\underline{u})$ eine $\Pi^1(T)$-Formel, wenn es eine Δ_0-Formel $B(\underline{u},v,w)$ ohne Relationskonstante U gibt mit

$T \vdash A(\underline{u}) \leftrightarrow Wf(N,\{<x,y>{\in}N^2 : B(\underline{u},x,y)\})$.

Lemma 3

Ist $C(\underline{u},v,w)$ eine Δ_0-Formel ohne Konstante U, und setzen wir

$B(U,w,\underline{u},v) := \forall x{\in}w(C(\underline{u},x,v) \to U(x))$,

so ist $B(U,w,\underline{u},v)$ aus $L_0(U^+,w,\underline{u},v)$; außerdem gilt:

$KP1^r \vdash Ad(a) \,\&\, \underline{c}{\in}a \to (Wf(N,\{<x,y>{\in}N^2 : C(\underline{c},x,y)\}) \leftrightarrow \forall x{\in}N Q^a_B(N,\underline{c},x))$.

Beweis:

Wir arbeiten wieder informal in $KP1^r$. Es gelte $Ad(a)$ und $\underline{c}{\in}a$. Nach (Lim) gibt es eine Menge a_0 mit $Ad(a_0)$ und $a{\in}a_0$. Setzen wir $b := \{<x,y>{\in}N^2 : C(\underline{c},x,y)\}$ und $d := \{x{\in}N : Q^a_B(N,\underline{c},x)\}$, so ist $b{\in}a$ und $d{\in}a_0$.

Die Richtung '→' der Äquivalenz folgt mit S6(a).

Andererseits gilt unter der Voraussetzung $\forall x \in N Q_B^a(N,\underline{c},x)$, daß d=N ist. Mit S6(b) erhalten wir dann für alle $e \subset N$ die Implikation $\forall x \in N(B(e,N,\underline{c},x) \rightarrow x \in e) \rightarrow e=N$. Daher folgt Wf(N,b), und es ist auch die Richtung '←' der Äquivalenz bewiesen.

Satz 9 (Quantorensatz)

Zu jeder $\Pi^1(KP1^r)$-Formel $A(\underline{u})$ gibt es eine Σ-Formel $A_\Sigma(\underline{u})$ mit

$KP1^r \vdash Ad(a) \& \underline{c} \in a \rightarrow (A(\underline{c}) \leftrightarrow A_\Sigma^a(\underline{c}))$.

Beweis:

Nach Voraussetzung gibt es eine Δ_0-Formel $C(\underline{u},v,w)$ mit

$KP1^r \vdash A(\underline{u}) \leftrightarrow Wf(N,\{\langle x,y\rangle \in N^2 : C(\underline{u},x,y)\})$.

Setzen wir

$B(U,w,\underline{u},v) := \forall x \in w(C(\underline{u},x,v) \rightarrow U(x))$ und

$A_\Sigma(\underline{u}) := \forall x \in N Q_B(N,\underline{u},x)$,

so folgt die Behauptung mit L3.

Satz 10 (Folgerung)

Ist $A(v,\underline{u})$ eine $\Pi^1(KP1^r)$-Formel, so gilt

(a) $KP1^r \vdash \forall \underline{x} \exists y \forall z \in N(z \in y \leftrightarrow A(z,\underline{x}))$

(b) Es gibt eine Σ-Formel $B(\underline{u})$ mit $KP1^r \vdash \exists x(x \subset N \& A(x,\underline{u})) \leftrightarrow B(\underline{u})$.

Beweis:

(a) folgt mit (Lim), S9 und relativer Δ_0-Separation.

(b) Nach S9 gibt es eine Σ-Formel $A_\Sigma(v,\underline{u})$ mit

$KP1^r \vdash Ad(a) \& v,\underline{u} \in a \rightarrow (A(v,\underline{u}) \leftrightarrow A_\Sigma^a(v,\underline{u}))$,

so daß wir mit (Lim) erhalten:

$KP1^r \vdash \exists x(x \subset N \& A(x,\underline{u})) \leftrightarrow \exists y(Ad(y) \& \underline{u} \in y \& \exists x \in y(x \subset N \& A_\Sigma^y(x,\underline{u})))$.

3.5. Einbettung von Systemen der Π^1_1-Analysis

Die Theorie $(\Pi^1_1\text{-CA})^r$ ist formuliert in einer Sprache der Arithmetik 2. Ordnung und umfaßt neben der rekursiven Zahlentheorie das Axiom der vollständigen Induktion

$\forall X(\bar{0}\in X \,\&\, \forall x\forall y(x\in X \& Su(x,y) \to y\in X) \to \forall x(x\in X))$

und das Schema der Π^1_1-Komprehension

$\exists Y\forall x(x\in Y \leftrightarrow \forall X F(X,x))$ für alle arithmetischen Formeln $F(V,v)$.

$(\Pi^1_1\text{-CA})$ ist die Theorie $(\Pi^1_1\text{-CA})^r$, verstärkt um das Schema der vollständigen Induktion

$F(\bar{0}) \,\&\, \forall x\forall y(F(x)\&Su(x,y) \to F(y)) \to \forall x F(x)$

für beliebige Formeln $F(v)$ der Arithmetik 2. Ordnung.

Die Wohlfundiertheit einer Relation $G(v,w)$ wird bei Theorien 2. Ordnung ausgedrückt durch die Formel

$WF(G) := \forall X(X\neq\emptyset \to \exists y\in X\forall x\in X\neg G(x,y))$;

mit (BI) bezeichnen wir das Schema

(BI) $WF(G) \to (\forall x(\forall y(G(y,x)\to F(y)) \to F(x)) \to \forall x F(x))$

für alle arithmetischen Relationen $G(v,w)$ und alle Formeln $F(v)$ der Sprache 2. Ordnung.

Wir können die Sprache der Arithmetik 2. Ordnung so wählen, daß sich jeder Satz F der Arithmetik 2. Ordnung kanonisch in einen Satz F^* der Sprache L^* übersetzen läßt. Dazu ersetzen wir in F (unter Vermeidung von Variablenkollision) die Zahlquantoren $\forall x(.x.)$ bzw. $\exists x(.x.)$ durch $\forall x\in N(.x.)$ bzw. $\exists x\in N(.x.)$ und die Mengenquantoren $\forall Y(.Y.)$ bzw. $\exists Y(.Y.)$ durch $\forall y(y\subset N \to .y.)$ bzw. $\exists y(y\subset N \,\&\, .y.)$.

Nach dem Π^1_1-Normalformentheorem (vgl. [12], [24] oder [32]) entspricht jeder Π^1_1-Formel der Arithmetik 2. Ordnung eine $\Pi^1(KP1^r)$-Formel, so daß wir mit S10(a) und S8 erhalten:

Satz 11 (Interpretationssatz)

Ist F ein Satz der Arithmetik 2. Ordnung, so gilt:

(a) $(\Pi^1_1\text{-CA})^\Gamma \vdash F \quad \Longrightarrow \quad KPl^\Gamma \vdash F^*$.

(b) $(\Pi^1_1\text{-CA}) \vdash F \quad \Longrightarrow \quad W\text{-}KPl \vdash F^*$.

(c) $(\Pi^1_1\text{-CA})+(BI) \vdash F \quad \Longrightarrow \quad KPl \vdash F^*$.

4. Die Theorien KPi^Γ, W-KPi und KPi

4.1. Die Axiome von KPi^Γ, W-KPi und KPi

Kombinieren wir die Theorien KPu und KPl, so erhalten wir ein System der Mengenlehre, dessen minimales Standardmodell die Gestalt $L(\iota_0)_N$ hat, wobei ι_0 die erste rekursiv unerreichbare Ordinalzahl bezeichnet. Ist nämlich $L(\alpha)_N$ ein Modell von KPu und von KPl, muß α zulässig sein und folgenden Gestalt haben: $\alpha = \sup\{\tau_\xi : \xi < \lambda\}$ mit λ Limeszahl. Die kleinste Ordinalzahl mit dieser Eigenschaft ist ι_0, der erste Fixpunkt der τ-Funktion.

Die Theorie KPi^Γ, W-KPi bzw. KPi ist formuliert in der Sprache L^* und umfaßt neben den Axiomen von KPl^Γ, W-KPl bzw. KPl das Schema der Δ_0-Kollektion

(Δ_0-Koll) $\forall x \in a \exists y F(x,y) \rightarrow \exists z \forall x \in a \exists y \in z F(x,y)$

für alle Δ_0-Formeln $F(u,v)$.

Man sieht sofort, daß KPi = KPu + KPl ist. Das Schema der Δ-Separation läßt sich in KPi^Γ auf gleiche Art beweisen wie in KPU (vgl. [2]).

4.2. Einbettung von Systemen der Δ^1_2-Analysis

Mit $(\Delta^1_2\text{-CA})^r$ und $(\Delta^1_2\text{-CA})$ bezeichnen wir die Theorien der Δ^1_2-Analysis, die sich ergeben, wenn wir $(\Pi^1_1\text{-CA})^r$ und $(\Pi^1_1\text{-CA})$ verstärken durch das Schema der Δ^1_2-Komprehension:

$\forall x(\forall X \exists Y F(X,Y,x) \leftrightarrow \exists X \forall Y G(X,Y,x)) \rightarrow \exists Z \forall x(x \in Z \leftrightarrow \forall X \exists Y F(X,Y,x))$,

für arithmetische Formeln $F(V,W,v)$ und $G(V,W,v)$.

Mit dem Π^1_1-Normalformentheorem, S10(b) und Δ-Separation erhalten wir sofort, daß in KPi^r die Übersetzung jeder Instanz der Δ^1_2-Komprehension beweisbar ist. Wir erhalten daher nach S11:

Satz 12 (Interpretationssatz)

Ist F ein Satz der Arithmetik 2. Ordnung, so gilt:

(a) $(\Delta^1_2\text{-CA})^r \vdash F \quad \Longrightarrow \quad KPi^r \vdash F^*$.

(b) $(\Delta^1_2\text{-CA}) \vdash F \quad \Longrightarrow \quad W\text{-}KPi \vdash F^*$.

(c) $(\Delta^1_2\text{-CA})+(BI) \vdash F \quad \Longrightarrow \quad KPi \vdash F^*$.

5. Die halbformalen Systeme H_o und H_1

5.1. Die Herleitungen in H_o und H_1

Für die weiteren Untersuchungen ist es zweckmäßig, in einem Zwischenschritt die Theorien W-KPl, KPi^r und W-KPi in geeignete halbformale Systeme einzubetten. H_o und H_1 werden wie die vorangegangenen formalen Systeme in der Sprache L^* formuliert; die Beweisrelation definieren wir jedoch für endliche Formelmengen, die disjunktiv zu interpretieren sind (vgl. [33] und [34]). Wir verwenden Γ, Λ als Mitteilungszeichen für solche Formelmengen und schreiben (z.B., Γ,Λ,A,B für $\Gamma \cup \Lambda \cup \{A,B\}$. Mit kleinen griechischen Buchstaben werden bis zum Ende von Teil A Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$ bezeichnet.

Definition des Grades gr(A) einer Formel A

1. Ist A eine Δ_0-Formel, so sei gr(A) := 0.

2. Ist A keine Δ_0-Formel, so sei

2.1. gr(A) := max{gr(B),gr(C)}+1, wenn A = (B&C) oder (BvC) ist.

2.2. gr(A) := gr(F(u))+1, wenn A = $\forall x F(x)$ oder $\exists x F(x)$ ist.

2.3. gr(A) := gr(F(u))+2, wenn A = $\forall x \in a F(x)$ oder $\exists x \in a F(x)$ ist.

Axiome von H_0–

(A1) $\Gamma, \overline{M}(\bar{n})$

(A2) $\Gamma, \bar{n} \in N$

(A3) $\Gamma, M(a)$, wenn a kein Term $\bar{n}$ ist.

(A4) $\Gamma, a \notin N$, wenn a kein Term $\bar{n}$ ist.

(A5) $\Gamma, a \notin \bar{n}$

(A6) $\Gamma, R_Z(\bar{n}_1,\ldots\bar{n}_m)$, wenn $Z(n_1,\ldots n_m)$ wahr ist.

(A7) $\Gamma, \overline{R_Z}(\bar{n}_1,\ldots\bar{n}_m)$, wenn $Z(n_1,\ldots n_m)$ falsch ist.

(A8) $\Gamma, \overline{R_Z}(a_1,\ldots a_m)$, wenn ein a_i kein Term $\bar{n}$ ist.

(A9) $\Gamma, \overline{U}(a)$, wenn a kein Term $\bar{n}$ ist.

(A10) $\Gamma, \neg A, A$, wenn A eine Δ_0-Formel ist.

(A11) $\Gamma, a=b \rightarrow (F(a) \rightarrow F(b))$, wenn F(u) eine Δ_0-Formel ist.

(A12) $\Gamma, Tran(a) \& \forall x \in a(\forall y \in x F(y) \rightarrow F(x)) \rightarrow \forall x \in a F(x)$, wenn F(u) eine Δ_0-Formel ist.

(A13) $\Gamma, F(\bar{0}) \& \forall x \in N \forall y \in N(F(x) \& Su(x,y) \rightarrow F(y)) \rightarrow \forall x \in N F(x)$, wenn F(u) eine Δ_0-Formel ist.

(A14) Γ, A , wenn A eines der Axiome (Ad1)-(Ad6) von S.11 ist.

Axiome von H_1–

(A1)-(A14) sind Axiome von H_1.

(A15) $\Gamma, \exists y(Ad(y) \& a \in y)$

Grundschlüsse von H_0–

(G1) Γ, A_1 und $\Gamma, A_2 \vdash \Gamma, A_1 \& A_2$

(G2) $\Gamma, A_i \vdash \Gamma, A_1 \vee A_2$, wenn i=1 oder i=2.

(G3) $\Gamma, b \in a \to F(b)$ für alle Terme b $\vdash \Gamma, \forall x \in a F(x)$

(G4) $\Gamma, b \in a \,\&\, F(b) \vdash \Gamma, \exists x \in a F(x)$

(G5) $\Gamma, F(b)$ für alle Terme b $\vdash \Gamma, \forall x F(x)$

(G6) $\Gamma, F(b) \vdash \Gamma, \exists x F(x)$

(sch) Γ, A und $\Gamma, \neg A \vdash \Gamma$

Grundschlüsse von H_1:

(G1)-(G6) und (sch) sind Grundschlüsse von H_1.

(G7) $\Gamma, \forall x \in a \exists y F(x,y) \vdash \Gamma, \exists z \forall x \in a \exists y \in z F(x,y)$, wenn $F(u,v)$ eine Δ_0-Formel ist.

Die Grundschlüsse (G1)-(G6) bzw. (G1)-(G7) heißen Hauptschlüsse von H_0 bzw. H_1. Die mit A und $\neg A$ bezeichneten Formeln in den Prämissen eines Schnittes nennen wir Schnittformeln des betreffenden Schnittes; der Grad eines Schnittes ist der Grad seiner Schnittformeln.

Definition von $H_i \vdash^{\alpha}_{n} \Gamma$ für i=0 und i=1

1. Ist Γ ein Axiom von H_i, so gelte $H_i \vdash^{\alpha}_{n} \Gamma$ für alle $\alpha < \varepsilon_0$ und alle $n < \omega$.

2. Gilt $H_i \vdash^{\alpha_j}_{n} \Gamma_j$ und $\alpha_j < \alpha$ für jede Prämisse Γ_j eines Hauptschlusses des Systems H_i oder eines Schnittes, dessen Grad $< n$ ist, so gelte $H_i \vdash^{\alpha}_{n} \Gamma$ für die zugehörige Konklusion Γ.

Lemma 4

(a) $H_i \vdash^{\alpha}_{n} \Gamma$ und $\alpha \leq \beta$ und $n \leq m$ $\Longrightarrow$ $H_i \vdash^{\beta}_{m} \Gamma, A$ (i=0,1).

(b) $H_i \vdash^{\alpha}_{n} \Gamma, \forall x F(x)$ $\Longrightarrow$ $H_i \vdash^{\alpha}_{n} \Gamma, F(a)$ (i=0,1)

Beweis von (a) und (b) durch Induktion nach α.

5.2. Schwache Schnittelimination in H_0 und H_1

Da die Hauptformeln der Axiome von H_0 und H_1 beschränkten Grad haben, läßt sich ähnlich wie in [33] und [17] für H_0 und H_1 schwache Schnittelimination durchführen.

Lemma 5

(a) $H_0 \Gamma^{\alpha}_{n+1} \Gamma,A$ und $H_0 \Gamma^{\beta}_{n+1} \Lambda,\neg A$ und $gr(A) \leq n+1$ $\Longrightarrow$ $H_0 \Gamma^{\alpha\#\beta\#1}_{n+1} \Gamma,\Lambda$.

(b) $H_1 \Gamma^{\alpha}_{n+2} \Gamma,A$ und $H_1 \Gamma^{\beta}_{n+2} \Lambda,\neg A$ und $gr(A) \leq n+2$ $\Longrightarrow$ $H_1 \Gamma^{\alpha\#\beta\#1}_{n+2} \Gamma,\Lambda$.

Beweis:

(a) und (b) werden durch Induktion nach $\alpha\#\beta$ bewiesen; dabei ist wesentlich, daß die Hauptformeln der Axiome Δ_0- bzw. Σ_1-Formeln sind und somit Grad 0 bzw. Grad 1 haben.

Satz 13

(a) $H_0 \Gamma^{\alpha}_{n+2} \Gamma$ $\Longrightarrow$ $H_0 \Gamma^{3^{\alpha}}_{n+1} \Gamma$

(b) $H_1 \Gamma^{\alpha}_{n+3} \Gamma$ $\Longrightarrow$ $H_1 \Gamma^{3^{\alpha}}_{n+2} \Gamma$

Beweis mit L5 durch Induktion nach α.

5.3. Einbettung der Theorien W-KPl, KPi^r und W-KPi

Die halbformalen Systeme H_0 und H_1 sind so angelegt, daß sich die Theorien W-KPl, KPi^r und W-KPi unmittelbar einbetten lassen. Das Schema der vollständigen Induktion und das Δ_0-Kollektionsschema werden mit den Grundschlüssen (G3) und (G7) bewiesen.

Satz 14 (Interpretationssatz)

(a) $W\text{-}KPl \vdash A$ $\Longrightarrow$ $\exists m,n<\omega$: $H_0 \Gamma^{\omega+m}_{n} \neg\forall x \exists y(Ad(y) \,\&\, x \in y),A$.

(b) $KPi^r \vdash A$ $\Longrightarrow$ $\exists m,n<\omega$: $H_1 \Gamma^{m}_{n} A$.

(c) $W\text{-}KPi \vdash A$ $\Longrightarrow$ $\exists m,n<\omega$: $H_1 \Gamma^{\omega+m}_{n} A$.

Satz 15 (Folgerung)

(a) W-KPl$\vdash$A ==⇒ $\exists\alpha<\varepsilon_0$: $H_0\frac{\alpha}{1}\neg\forall x\exists y(Aa(y,\dot{x})\wedge Cy,,F$.

(b) $KPi^{r}\vdash A$ ==⇒ $\exists m<\omega$: $H_1\frac{m}{2}A$.

(c) W-KPi$\vdash$A ==⇒ $\exists\alpha<\varepsilon_0$: $H_1\frac{\alpha}{2}A$.

Beweis mit S13 und S14.

Teil B. Das System RS(Ω) der geschichteten Mengenlehre

1. Das Ordinalzahlbezeichnungssystem

Zur Bezeichnung von Ordinalzahlen verwenden wir das System $\overline{\theta}(\Omega)$ von [5] und [29]. Dieses System hat den Vorteil, daß es eine relativ einfache und natürliche Erklärung in der klassischen Ordinalzahltheorie besitzt. Bei der Entwicklung von $\overline{\theta}(\Omega)$ wird Ω gewöhnlich als Ordnungsfunktion von $K := \{0\} \cup \{\aleph_\xi : 0<\xi\}$ interpretiert. Es ist jedoch möglich, die Kardinalzahlen $>\omega$ durch zulässige Ordinalzahlen $>\omega$ und ihre Limites zu ersetzen. Für das bezeichnete Segment ist diese Unterscheidung unerheblich. Da wir aber auch an den Zusammenhängen zur Definierbarkeitstheorie interessiert sind, bleiben wir in der zweiten Zahlenklasse, fassen $\overline{\theta}(\Omega)$ als Teilmenge der Ordinalzahlen auf und verstehen Ω als die stetige Fortsetzung der Funktion $\{<0,0>\} \cup \{<\alpha,\tau_\alpha> : \alpha \in \overline{\theta}(\Omega) \text{ und } 0<\alpha\}$. Die zulässigen Ordinalzahlen aus $\overline{\theta}(\Omega)$ haben die Gestalt $\Omega_{\alpha+1}$ mit $\alpha \in \overline{\theta}(\Omega)$ oder ω.

Als Mitteilungszeichen (auch mit Indizes) verwenden wir

α, β, γ, δ, ζ, ξ, ρ, σ	für Elemente aus $\overline{\theta}(\Omega)$,
κ	für zulässige Ordinalzahlen aus $\overline{\theta}(\Omega)$ $>\omega$,
λ, μ, ν	für Ordinalzahlen der Gestalt Ω_α,
i, k, l, m, n	für natürliche Zahlen.

Endliche Folgen werden durch Unterstreichen der entsprechenden Mitteilungszeichen gekennzeichnet.

Definition

1. $S\alpha := \min\{\Omega_\beta : \alpha<\Omega_{\beta+1}\}$.
2. $\alpha^+ := \min\{\Omega_{\beta+1} : \alpha<\Omega_{\beta+1}\}$.
3. $\alpha^- := \sup\{S\beta : \beta<\alpha\}$.

Lemma 6 (Folgerung)

(a) $S\alpha \leq \alpha < \alpha^+$; $(\Omega_{\alpha+1})^- = \Omega_\alpha$; $(\Omega_{\omega\alpha})^- = \Omega_{\omega\alpha}$.

(b) $\Omega_\beta \leq \alpha < \Omega_{\beta+1} \quad ==\Rightarrow \quad S\alpha = \Omega_\beta$ und $\alpha^+ = \Omega_{\beta+1}$.

Wir haben die Stufe $S\alpha$ einer Ordinalzahl α definiert wie in [3]. Diese Definition unterscheidet sich von der Definition in [29], wo $S\alpha$ das kleinste β mit $\alpha<\Omega_{\beta+1}$ ist. Mit Hilfe der Koeffizientenmengen $K_\nu\alpha$ von [3] und der 2-stelligen Klammerfunktion $(.,.): \overline{\Theta}(\Omega) \times \overline{\Theta}(\Omega) \to \overline{\Theta}(\Omega)$ von [4], die die Eigenschaft $S(\alpha,\beta) = S\beta$ hat, können wir die Kollabierungsfunktionen $D_\nu : \overline{\Theta}(\Omega) \to \overline{\Theta}(\Omega) \cap \nu^+$ und die Relationen $\ll_\nu$, $\leqq_\nu$ definieren. Ist T eine Teilmenge von $\overline{\Theta}(\Omega)$, so bedeutet $T<\alpha$, daß $\xi<\alpha$ für alle $\xi \in T$ gilt.

Definition der Kollabierungsfunktionen D_ν

$$D_\nu\alpha := \begin{cases} \alpha & , \text{ wenn } S\alpha \leq \nu \\ (\alpha,\nu) & , \text{ wenn } \nu < S\alpha \end{cases} .$$

Definition der Relationen $\ll_\nu$ und $\leqq_\nu$

1. $\alpha \ll_\nu \beta \quad :\Leftrightarrow\Rightarrow \quad \alpha < \beta$ und $\forall\lambda\geq\nu(K_\lambda\alpha < (\beta,\lambda))$.
2. $\alpha \ll \beta \quad :\Leftrightarrow\Rightarrow \quad \alpha \ll_0 \beta$.
3. $\alpha \leqq_\nu \beta \quad :\Leftrightarrow\Rightarrow \quad \alpha = \beta$ oder $\alpha \ll_\nu \beta$.
4. $\alpha \leqq \beta \quad :\Leftrightarrow\Rightarrow \quad \alpha \leqq_0 \beta$.

Lemma 7 (Folgerung)

$\alpha \ll_\nu \beta \quad ==\Rightarrow \quad \forall\lambda\geq\nu(D_\lambda\alpha \ll_\nu D_\lambda\beta)$.

Definition

Ist $\underline{\nu} = \nu_1,\ldots\nu_n$ mit $n\geq 0$, so sei

1. $D_{\underline{\nu}}\alpha := \begin{cases} \alpha & , \text{ wenn } n=0 \\ D_{\nu_1}\ldots D_{\nu_n}\alpha & , \text{ wenn } n\geq 1 \end{cases}$.
2. $\alpha < \underline{\nu} \quad :\Leftrightarrow\Rightarrow \quad \alpha < \nu_i$ für $1\leq i\leq n$.

Definition

1. Eine Ordinalzahl α heißt ε-Zahl, wenn $\omega^{\alpha} = \alpha$ ist.

2. Ist T eine Teilmenge von $\overline{\Theta}(\Omega)$, so sei

$T \ll\!\!= \alpha \quad :\Leftrightarrow\Rightarrow \quad \forall \xi \in T(\xi \ll\!\!= \alpha)$.

Für alle Ordinalzahlrechnungen, die im folgenden auftreten, sei auf [3], [4], [5] und [29] verwiesen. Einige Eigenschaften von $\overline{\Theta}(\Omega)$ sind in den folgenden beiden Lemmata zusammengefaßt.

Lemma 8

Für $\lambda \leq \mu \leq \nu$ gilt:

(a) $D_{\nu}(\alpha \# \beta) \ll_{\mu} \gamma$ und $D_{\nu}\alpha \ll_{\lambda} \gamma$ und $D_{\nu}\beta \ll_{\lambda} \gamma \quad \Longrightarrow$
$D_{\nu}(\alpha \# \beta) \ll_{\lambda} \gamma$.

(b) $D_{\nu}\omega^{\alpha} \ll_{\mu} \gamma$ und $D_{\nu}\alpha \ll_{\lambda} \gamma \quad \Longrightarrow \quad D_{\nu}\omega^{\alpha} \ll_{\lambda} \gamma$.

(c) $D_{\nu}(\alpha, \beta \# \alpha) \ll_{\mu} \gamma$ und $D_{\nu}\alpha \ll_{\lambda} \gamma$ und $D_{\nu}\beta \ll_{\lambda} \gamma \quad \Longrightarrow$
$D_{\nu}(\alpha, \beta \# \alpha) \ll_{\lambda} \gamma$.

Lemma 9

(a) $S\alpha \ll\!\!= \alpha$.

(b) $\alpha \ll \beta$ und $\nu \ll\!\!= \beta \quad \Longrightarrow \quad D_{\nu}\alpha \ll \beta$.

(c) $\beta \ll \alpha$ und $\beta^{+} \leq \nu \quad \Longrightarrow \quad S\beta, \beta^{+} \ll \alpha \# \nu$.

(d) $\beta, \gamma \ll \alpha \# \nu$ und $S\gamma < \nu \quad \Longrightarrow \quad (\beta, \gamma) \ll \alpha \# \nu$.

(e) $\alpha \# D_{\nu}\alpha \ll \alpha \# \nu^{+}$.

2. Die Sprache von RS(Ω)

Als Grundzeichen des Systems RS(Ω) verwenden wir:

1. Alle Grundzeichen der Theorien für zulässige Mengen.

2. Für jede Ordinalzahl $\alpha \in \overline{\Theta}(\Omega)$ mit $\alpha > 0$ eine Konstante M_{α}; die Konstanten N und M_1 werden identifiziert.

3. Geschweifte Klammern und Doppelpunkt.

Die Formeln, Δ_0-, Σ- bzw. Π-Formeln von L^*, in denen die Konstanten $\bar{n}$ und N nicht auftreten, nennen wir Grundformeln, Δ_0-Σ- bzw. Π-Grundformeln von RS(Ω); ihre Länge ist definiert wie in Teil A.

Für Nennformen, in denen keine freien Variablen auftreten, verwenden wir wieder die Skriptbuchstaben $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Mit $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ bezeichnen wir jetzt Nennformen, die aus Grundformeln entstehen, wenn darin alle freien Variablen durch Terme von RS(Ω) (Definition s.u.) und Nennzeichen ersetzt werden.

Ist F eine Zeichenreihe, so sei F^α die Zeichenreihe, die sich aus F ergibt, wenn jeder in F auftretende unbeschränkte Quantor $\forall x$ bzw. $\exists x$ durch $\forall x \in M_\alpha$ bzw. $\exists x \in M_\alpha$ ersetzt wird. Wir schreiben $\mathcal{A}^\alpha(\underline{r})$ für $\mathcal{A}(\underline{r})^\alpha$.

Definition der Terme von RS(Ω) und ihrer Schichten

1. $\bar{n}$ und M_α sind Terme der Schichten 0 und α.
2. Sind $a_1,\ldots a_n$ Terme der Schichten $\alpha_1,\ldots\alpha_n \ll \alpha$, ist $\mathcal{A}(u,v_1,\ldots v_n)$ eine Grundformel und x eine gebundene Variable, die nicht in $\mathcal{A}(u,v_1,\ldots v_n)$, $a_1,\ldots a_n$ auftritt, so ist $\{x\in M_\alpha : \mathcal{A}^\alpha(x,a_1,\ldots a_n)\}$ ein Term der Schicht α.

Die Terme $\bar{n}$ und M_α nennen wir Grundterme, alle anderen Terme heißen komplexe Terme; die Schicht eines Terms a bezeichnen wir mit sch(a). Schreiben wir im folgenden nur $\{x\in M_\alpha : F(x)\}$, so setzen wir voraus, daß F(x) die Gestalt $\mathcal{A}^\alpha(x,a_1,\ldots a_n)$ hat und alle Bedingungen von Punkt 2 der letzten Definition erfüllt sind. Bei der Definition eines komplexen Terms der Schicht α müssen alle Parameter Schichten $\ll \alpha$ besitzen, damit wir später bei Herleitungen auf einfache Weise mit α auch die Schichten der Parameter kontrollieren können (vgl. §22).

Definition der Formeln von RS(Ω) und ihrer Schichten

1. Ist R eine n-stellige Relationskonstante ($n \geq 1$) und sind $a_1, \ldots a_n$ Terme der Schichten $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, so sind $R(a_1, \ldots a_n)$ und $\bar{R}(a_1, \ldots a_n)$ Formeln der Schicht $\max\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}+1$; $t(R(a_1, \ldots a_n)) := t(\bar{R}(a_1, \ldots a_n)) := \{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$.

2. Sind A und B Formeln der Schichten α und β, so sind (A&B) und (AvB) Formeln der Schicht $\max\{\alpha,\beta\}$; $t((A\&B)) := t((AvB)) := t(A) \cup t(B)$.

3. Ist $F(\bar{0})$ eine Formel der Schicht α und x eine gebundene Variable, die nicht in $F(\bar{0})$ auftritt, so sind $\forall x \in M_\beta F(x)$ und und $\exists x \in M_\beta F(x)$ Formeln der Schicht $\max\{\alpha,\beta\}$; $t(\forall x \in M_\beta F(x)) := t(F(\bar{0})) \cup \{\beta\}$, $t(\exists x \in M_\beta F(x)) := t(F(\bar{0}))$.

4. Ist a ein Term der Schicht α, der nicht die Gestalt M_α hat, $F(\bar{0})$ eine Formel der Schicht β und x eine gebundene Variable, die nicht in $F(\bar{0})$, a auftritt, so sind $\forall x \in a F(x)$ und $\exists x \in a F(x)$ Formeln der Schicht $\max\{\alpha+1,\beta\}$; $t(\forall x \in a F(x)) := t(\exists x \in a F(x)) := t(F(\bar{0})) \cup \{\alpha\}$.

Wir nennen eine Formel A der Schicht α eine starke Formel der Schicht α, wenn sie eine Teilformel $\forall x \in M_\alpha F(x)$ hat; anderenfalls nennen wir A eine schwache Formel der Schicht α. Mit sch(A) wird die Schicht der Formel A bezeichnet.

Bemerkung

1. t(A) gibt uns vollständige Information über die Schichten der 'Π-Bestandteile' der Formel A; ihre Bedeutung zeigt sich bei der Schnittelimination.

2. Formeln entstehen aus Δ_0-Grundformeln, indem alle freien Variablen (unter Vermeidung von Variablenkollision) durch Terme ersetzt werden. Bei der Interpretation in L(U) entsprechen den Formeln der Schicht α die Sätze $A^{L(U,\alpha)}$ mit Parametern aus $L(U,\alpha)$.

Mitteilungszeichen (auch mit Indizes):

A, B, C, D	für Formeln,
a^α, b^α, c^α, d^α	für Terme der Schicht α,
a, b, c, d, e	für Terme beliebiger Schichten,
s, x, y, z	für gebundene Variablen.

Endliche Folgen werden durch Unterstreichen der entsprechenden Mitteilungszeichen gekennzeichnet.

Wir schreiben wieder $(a\in b)$, $(a\notin b)$, $(a\equiv b)$ bzw. $(a\not\equiv b)$ für $\in(a,b)$, $\overline{\in}(a,b)$, $\equiv(a,b)$ bzw. $\overline{\equiv}(a,b)$ und lassen bei Formeln in der Regel die äußeren Klammern fort. Die Negation $\neg A$ einer Formel A und $A\to B$, $A\leftrightarrow B$, $a=b$, $a\neq b$ sowie $Tran(a)$ werden entsprechend zu Teil A definiert.

Definition der Stufe $S(A)$ einer Formel A

$$S(A) := \begin{cases} \alpha^- , & \text{wenn A eine schwache Formel der Schicht } \alpha \text{ ist} \\ S\alpha , & \text{wenn A eine starke Formel der Schicht } \alpha \text{ ist.} \end{cases}$$

Lemma 10

(a) $sch(A) = sch(\neg A)$.

(b) $t(F(a)) \subset t(F(b)) \cup \{sch(a)\}$.

(c) $S(A\&B) = S(A\vee B) = \max\{S(A),S(B)\}$.

(d) $S(F(a^\alpha)) \leq \max\{S\alpha, S(F(\bar{0}))\}$.

(e) $\alpha \in t(A) \quad ==\Rightarrow \quad S\alpha \leq S(A)$.

(f) $t(a^\alpha = b^\beta) = t(a^\alpha \neq b^\beta) = \{\alpha,\beta\}$.

(g) Für a und $F(\bar{0},\bar{0})$ mit $sch(a)$, $sch(F(\bar{0},\bar{0})) < \kappa$:

$S(\forall x\in a \exists y\in M_\kappa F(x,y)) = S(\exists z\in M_\kappa \forall x\in a \exists y\in z F(x,y)) = \kappa^-$.

Beweis durch Nachrechnen.

Definition des Ranges rn(A) einer Formel A

1. Ist R eine von $\in$, Ad verschiedene n-stellige Relationskonstante ($n \geq 1$) und sind $a_1, \ldots a_n$ Terme der Schichten $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, so sei

$rn(R(a_1, \ldots a_n)) := rn(\bar{R}(a_1, \ldots a_n)) := \omega \cdot \max\{3\alpha_1+1, \ldots 3\alpha_n+1\}$.

2. Sind a und b Terme der Schichten α und β, so sei

$rn(a \in b) := rn(a \notin b) := \omega \cdot \max\{3\alpha+2, 3\beta+1\}$ und

$rn(Ad(a)) := rn(\overline{Ad}(a)) := \omega \cdot (3\alpha+2)$.

3. $rn(A \& B) := rn(A \vee B) := \max\{rn(A), rn(B)\}+1$.

4. $rn(\forall x \in M_\alpha F(x)) := rn(\exists x \in M_\alpha F(x)) := \max\{\omega 3\alpha, rn(F(\bar{0}))+1\}$.

5. Ist a ein von M_α verschiedener Term der Schicht α, so sei

$rn(\forall x \in a F(x)) := rn(\exists x \in a F(x)) := rn(\bar{0} \in a \ \& \ F(\bar{0}))+2$.

Bemerkung

Um lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden, sind wir bei dieser Definition sehr großzügig vorgegangen; rn(A) ist eine obere Schranke für die Tiefe des definierenden Baumes. Bei Ramified Forcing (vgl. etwa [7] und [8]) wird die Ordnung einer Formel auf ähnliche Weise definiert.

Lemma 11

(a) $rn(A) = rn(\neg A)$.

(b) Für $\alpha<\beta$: $rn(F(a^\alpha)) < \max\{\omega 3\beta, rn(F(\bar{0}))+1\}$.

(c) Ist A eine Formel der Schicht $\alpha+1$, so gilt

$\omega 3\alpha+\omega \leq rn(A) < \omega 3(\alpha+1)+\omega$.

(d) Ist A eine Formel der Schicht α mit α Limeszahl, so gilt

$\omega\alpha \leq rn(A) < \omega\alpha+\omega$.

(e) Für $\beta = \max(t(A) \cup t(\neg A))$ gilt $\omega 3\beta \leq rn(A) < \omega 3\beta+\omega 3$.

(f) Ist $A(\underline{u})$ eine Grundformel der Länge k und sind $\underline{a}$ Terme mit Schichten $<\alpha$, so gilt $rn(A^\alpha(\underline{a})) < \omega 3\alpha+2k$; ist $A(\underline{u})$ eine Δ_0-Grundformel, so gilt sogar $rn(A(\underline{a})) < \omega 3\alpha$.

(g) Es gilt $rn(A) = \nu$ genau dann, wenn A oder $\neg A$ die Gestalt $\forall x \in M_\nu F(x)$ hat und dabei $sch(F(\bar{0})) < \nu$ ist.

(h) $S(A) \leq rn(A)$.

(i) $rn(a^\alpha = b^\beta) < \max\{\omega 2, \omega 3\alpha + \omega, \omega 3\beta + \omega\} + 7$.

Beweis durch Nachrechnen.

Satz 16

(a) Für $i = 1,2$: $rn(A_i) < rn(A_1 \& A_2)$.

(b) Für $\alpha < \beta$: $rn(F(a^\alpha)) < rn(\forall x \in M_\beta F(x))$.

(c) Für jeden komplexen Term a der Schicht α:

$rn(\forall x \in M_\alpha (x \in a \to F(x)) < rn(\forall x \in a F(x))$.

(d) $rn(\exists x \in M_\beta (a = x)) < rn(a \in M_\beta)$.

(e) $rn(\exists x \in M_\beta (a = x \,\&\, F(x)) < rn(a \in \{x \in M_\beta : F(x)\})$.

(f) Für $\kappa \leq sch(a)$: $rn(a = M_\kappa) < rn(Ad(a))$.

Beweis mit Hilfe von L11.

3. Ordinalzahltheoretische Hilfsmittel

Definition

Es sei J eine Menge von Termen und $(\alpha_a : a \in J)$ eine Folge von Ordinalzahlen. Ein Paar $\langle (\alpha_a : a \in J), \alpha \rangle$ heißt σ-schön, wenn gilt:

(σ1) $\sigma \ll \alpha$ und $sch(a) < \sigma$ für alle $a \in J$.

(σ2) Für alle $a \in J$, alle $\lambda \leq S\sigma \leq \underline{\nu}$ und alle γ:

$D_{\underline{\nu}} \alpha \ll_\lambda \gamma$ und $sch(a) \ll_\lambda \gamma \quad ==\Rightarrow \quad D_{\underline{\nu}} \alpha_a \ll_\lambda \gamma$.

Lemma 12

Es sei J eine Menge von Termen und $\langle (\alpha_a : a \in J), \alpha \rangle$ ein σ-schönes Paar. Dann gilt:

(a) $a \in J$ und $\lambda \leq S\sigma$ und $sch(a) \ll_\lambda \sigma \quad ==\Rightarrow \quad \alpha_a \ll_\lambda \alpha$.

(b) $a \in J \quad ==\Rightarrow \quad \alpha_a \# sch(a) \ll \alpha \# sch(a)$.

(c) $a \in J$ und $sch(a) \ll \gamma \implies \alpha_a \# \gamma \ll \alpha \# \gamma$.

(d) $\alpha \ll \gamma \implies \langle (\alpha_a : a \in J), \gamma \rangle$ ist σ-schön .

(e) $\langle (\alpha_a \# \gamma : a \in J), \alpha \# \gamma \rangle$ ist σ-schön .

(f) $\langle (\omega^{\alpha_a} : a \in J), \omega^{\alpha} \rangle$ ist σ-schön .

(g) $S\sigma \leq \nu \implies \langle (D_\nu \alpha_a : a \in J), D_\nu \alpha \rangle$ ist σ-schön .

(h) $\langle (\{\rho, \alpha_a \# \rho\} : a \in J), \{\rho, \alpha \# \rho\} \rangle$ ist σ-schön .

Beweis mit Ergebnissen von [3], [4] und L8.

Lemma 13

Für $J_1 := \{a : sch(a) < \sigma\}$ und $J_2 := \{M_\kappa : \kappa \leq \beta\}$ gilt:

(a) $\langle (\alpha \# sch(a) : a \in J_1), \alpha \# \sigma \rangle$ ist σ-schön .

(b) Ist $\gamma < \omega^{3\sigma}$ und $\gamma \ll \alpha \# \omega^{3\sigma}$, so ist
$\langle (\alpha \# \omega^{3sch(a)+2} n \# \gamma : a \in J_1), \alpha \# \omega^{3\sigma} \rangle$ σ-schön .

(c) $\langle (\alpha \# \omega^{sch(a)+1} n : a \in J_1), \alpha \# \omega^{\sigma} n \# 1 \rangle$ ist σ-schön .

(d) $\langle (\alpha \# \omega^{3sch(a)+1} n : a \in J_2), \alpha \# \omega^{3\beta+1} n \# 1 \rangle$ ist $(\beta+1)$-schön .

(e) $\langle (\alpha \# \omega^{3sch(a)+2} n : a \in J_2), \alpha \# \omega^{3\beta+2} n \# 1 \rangle$ ist $(\beta+1)$-schön .

Beweis mit Ergebnissen von [3], [4] und L8, L12.

Lemma 14

$\gamma, \rho_0 \ll (\rho, \delta)$ und $\rho_0 < \rho \leq \delta^+ \implies (\rho_0, \gamma) \ll (\rho, \delta)$

Beweis mit Ergebnissen von [3], [4].

Definition

$it_1[\alpha, \beta] := (\alpha, \beta \# \alpha)$ und $it_{n+1}[\alpha, \beta] := (\alpha, it_n[\alpha, \beta] \# \alpha)$.

Lemma 15

Unter den Voraussetzungen

$t(A) \leq \alpha_0 \ll \alpha$, $t(\neg A) \leq \alpha_1 \ll \alpha$, $\rho \neq 0$ und $\beta \leq rn(A) < \beta + \omega^\rho \leq \beta^+$

gibt es ein n und ein $\zeta < \rho$ mit $rn(A) < \beta + \omega^\zeta n$ und

$it_n[\zeta, (\rho, \alpha_0 \# \rho) \# (\rho, \alpha_1 \# \rho)] \ll (\rho, \alpha \# \rho)$.

Beweis:

Ist $rn(A) = \beta$, so setzen wir $n=1$ und $\zeta=0$. Anderenfalls gibt es Ordinalzahlen $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_k$ mit $rn(A) = \beta+\omega^{\sigma_1}+\ldots+\omega^{\sigma_k}$; dann setzen wir $n=k+1$ und $\zeta=\sigma_1$. In beiden Fällen folgt die Behauptung mit Ergebnissen von [3], [4] und L11(e), L14.

4. Herleitungen in RS(Ω)

Mit Γ, Λ, Φ, Γ_i, Λ_i, Φ_i werden nun endliche Mengen von RS(Ω)-Formeln bezeichnet; diese Formelmengen sind disjunktiv zu interpretieren. Abkürzend schreiben wir (z.B.) Γ,A und Γ,Λ,A,B für $\Gamma\cup\{A\}$ und $\Gamma\cup\Lambda\cup\{A,B\}$.

Definition

1. $t(\Gamma) := \bigcup\{t(A):A\in\Gamma\}$.
2. $S(\Gamma) := \sup\{S(A):A\in\Gamma\}$.

Axiome von RS(Ω)

(Ax1) $\Gamma, \overline{M}(\bar{n})$

(Ax2) $\Gamma, M(a)$, wenn $sch(a)>0$ ist.

(Ax3) $\Gamma, a\notin\bar{n}$

(Ax4) $\Gamma, \forall x\in\bar{n}F(x)$

(Ax5) $\Gamma, R_Z(\bar{n}_1,\ldots\bar{n}_m)$, wenn $Z(n_1,\ldots n_m)$ wahr ist.

(Ax6) $\Gamma, \overline{R_Z}(\bar{n}_1,\ldots\bar{n}_m)$, wenn $Z(n_1,\ldots n_m)$ falsch ist.

(Ax7) $\Gamma, \overline{R_Z}(a_1,\ldots a_m)$, wenn $sch(a_i)>0$ für ein $1\leq i\leq m$ ist.

(Ax8) $\Gamma, \overline{U}(\bar{n}), U(\bar{n})$

(Ax9) $\Gamma, \overline{U}(a)$, wenn $sch(a)>0$ ist.

(Ax10) $\Gamma, \overline{Ad}(a)$, wenn $sch(a)<\Omega_1$ ist.

Hauptschlüsse von RS(Ω)

(&) Γ_1, A_1 und $\Gamma_2, A_2 \vdash \Gamma_1, \Gamma_2, A_1\&A_2$

(v) $\Gamma, A_i \vdash \Gamma, A_1 v A_2$, wenn $i=1$ oder $i=2$.

$(\in^1)$ $\Gamma, \exists x \in M_\beta (a=x) \vdash \Gamma, a \in M_\beta$

$(\notin^1)$ $\Gamma, \forall x \in M_\beta (a \neq x) \vdash \Gamma, a \notin M_\beta$

$(\in^2)$ $\Gamma, \exists x \in M_\beta (a=x \,\&\, F(x)) \vdash \Gamma, a \in \{x \in M_\beta : F(x)\}$

$(\notin^2)$ $\Gamma, \forall x \in M_\beta (a \neq x \vee \neg F(x)) \vdash \Gamma, a \notin \{x \in M_\beta : F(x)\}$

$(b\forall)$ $\Gamma, \forall x \in M_\alpha (x \in a \to F(x)) \vdash \Gamma, \forall x \in a F(x)$, wenn a ein komplexer Term der Schicht α ist.

$(b\exists)$ $\Gamma, \exists x \in M_\alpha (x \in a \,\&\, F(x)) \vdash \Gamma, \exists x \in a F(x)$, wenn a ein komplexer Term der Schicht α ist.

$(Cl\kappa)$ $\Gamma, \forall x \in a \exists y \in M_\kappa F(x,y) \vdash \Gamma, \exists z \in M_\kappa \forall x \in a \exists y \in z F(x,y)$, wenn $sch(a), sch(F(\bar{0},\bar{0})) < \kappa$ sind.

Starke σ-Schlüsse von $RS(\Omega)$

$(\forall)$ $(\Gamma, F(b) : sch(b) < \sigma) \vdash \Gamma, \forall x \in M_\sigma F(x)$

$(\overline{Ad})$ $(\Gamma, a \neq M_\kappa : \kappa < \sigma) \vdash \Gamma, \overline{Ad}(a)$, wenn $\sigma = sch(a)+1 > \Omega_1$ ist.

Schwache σ-Schlüsse von $RS(\Omega)$

$(\exists)$ $\Gamma, F(b) \vdash \Gamma, \exists x \in M_\sigma F(x)$, wenn $sch(b) < \sigma$ ist.

(Ad) $\Gamma, a = M_\kappa \vdash \Gamma, Ad(a)$, wenn $\sigma = sch(a)+1 > \kappa$ ist.

Schnitte von $RS(\Omega)$

(sch) Γ_1, A und $\Gamma_2, \neg A \vdash \Gamma_1, \Gamma_2$

Jeder Hauptschluß, starke σ-Schluß oder schwache σ-Schluß hat die Gestalt (S) $\Gamma, A \vdash \Gamma, B$ oder (S) Γ_1, A_1 und $\Gamma_2, A_2 \vdash \Gamma_1, \Gamma_2, B$ oder (S) $(\Gamma, F(b) : b \in J) \vdash \Gamma, B$; die Formel B heißt dann Hauptformel von (S). Die mit A und $\neg A$ bezeichneten Formeln in den Prämissen eines Schnittes nennen wir Schnittformeln des betreffenden Schnittes; der Rang eines Schnittes ist der Rang seiner Schnittformeln.

Bemerkung

Die Stärke von $RS(\Omega)$ liegt in den Schlüssen $(Cl\kappa)$; nur dadurch wird das System imprädikativ.

Definition von $\vdash \Gamma\ [\alpha, \rho]$

1. Ist Γ ein Axiom, so gelte $\vdash \Gamma\ [\alpha, \rho]$ für alle ρ und alle $\alpha > 0$ mit $t(\Gamma) \ll \alpha$.

2. Gilt $\vdash \Gamma_i\ [\alpha_i, \rho]$ und $\alpha_i \ll \alpha$ für jede Prämisse Γ_i eines Hauptschlusses oder eines Schnittes, dessen Rang $< \rho$ ist, so gelte $\vdash \Lambda\ [\alpha, \rho]$ für jede Obermenge Λ der zugehörigen Konklusion Γ, die $t(\Lambda) \ll \alpha$ erfüllt.

3. Ist $(S)\ \Gamma, F(b) : b \in J \vdash \Gamma, B$ ein starker σ-Schluß und gelten

$(S1)$ $\vdash \Gamma, F(b)\ [\alpha_b, \rho]$ für alle $b \in J$

$(S2)$ $\langle (\alpha_b : b \in J), \alpha \rangle$ ist σ-schön

$(S3)$ $\Gamma \subset \Lambda$ und $t(\Lambda) \ll \alpha$,

so gelte $\vdash \Lambda, B\ [\alpha, \rho]$.

4. Ist $(S)\ \Gamma, F(b) \vdash \Gamma, B$ ein schwacher σ-Schluß und gelten

$(S1)$ $\vdash \Gamma, F(b)\ [\alpha_0, \rho]$

$(S2)$ $\alpha_0 \ll \alpha$ und $sch(b) \ll \alpha$

$(S3)$ $\Gamma \subset \Lambda$ und $t(\Lambda) \ll \alpha$,

so gelte $\vdash \Lambda, B\ [\alpha, \rho]$.

Gilt $\vdash \Gamma\ [\alpha, \rho]$ und wurde bei dieser Herleitung zuletzt ein Schluß (S) angewendet, so sagen wir, daß Γ das Resultat (einer Anwendung) von (S) ist.

Lemma 16 (Folgerung)

$\vdash \Gamma\ [\alpha, \rho]$ und $\alpha \ll \beta$ und $\rho \leq \zeta$ $\Longrightarrow$ $\vdash \Gamma\ [\beta, \zeta]$.

Beweis mit Hilfe von L12(d).

Lemma 17 (Strukturschlußlemma)

$\vdash \Gamma\ [\alpha, \rho]$ und $t(\Lambda) \ll \beta$ und $\alpha \ll \beta$ $\Longrightarrow$ $\vdash \Gamma, \Lambda\ [\beta, \rho]$.

Beweis mit Hilfe von L12(d).

Lemma 18

Ist Γ Prämisse eines Hauptschlusses, eines starken σ-Schlusses oder eines schwachen σ-Schlusses mit Konklusion Λ, so gilt $S(\Gamma) \leq S(\Lambda)$.

Beweis mit L10(c),(d),(g).

Lemma 19

$\vdash \Gamma\ [\alpha, \rho] \quad ==\Rightarrow \quad t(\Gamma) \lessdot \alpha$.

Beweis durch Induktion nach α:

1. Wurde Γ nicht zuletzt durch einen starken oder schwachen σ-Schluß gewonnen, so folgt die Behauptung unmittelbar.

2. Ist Γ das Resultat eines starken σ-Schlusses, so hat dieser die Gestalt (S) $(\Lambda, F(b) : b \in J) \vdash \Lambda, B$ mit $\Lambda, B \subset \Gamma$. Es gibt dann eine Ordinalzahlfolge $(\alpha_b : b \in J)$ und einen Term $a \in J$, so daß das Paar $\langle (\alpha_b : b \in J), \alpha \rangle$ σ-schön ist und $\vdash \Lambda, F(a)\ [\alpha_a, \rho]$ sowie $sch(a) \lessdot \sigma$ gelten. Mit L12(a) erhalten wir $\alpha_a \lessdot \alpha$ und daraus mit der IV $t(\Lambda, F(a)) \leq \alpha_a \lessdot \alpha$. Da nach L10(b),(f) $t(\Gamma) \subset t(\Gamma \setminus (\Lambda, B)) \cup t(\Lambda, F(a)) \cup \{\sigma, 0\}$ ist, folgt die Behauptung mit den Ordinalzahlbedingungen von (S).

3. Ist Γ das Resultat eines schwachen σ-Schlusses, so folgt die Behauptung mit IV, L10(b),(f) und den Ordinalzahlbedingungen dieses Schlusses.

Bemerkung

Ohne darauf hinzuweisen, verwenden wir L19 häufig bei der Anwendung von Schlüssen.

Gilt etwa $\vdash \Gamma, A\ [\alpha, \rho]$ und $\vdash \Lambda, \neg A\ [\beta, \rho]$ und $rn(A) < \rho$ und $\alpha, \beta \lessdot \gamma$, so ist nach L19 $t(\Gamma, \Lambda) \lessdot \gamma$. Mit einem Schnitt können wir also auf $\vdash \Gamma, \Lambda\ [\gamma, \rho]$ schließen.

Satz 17 (Inversionssatz).

(a) $\vdash \Gamma, A \vee B\ [\alpha, \rho] \Longrightarrow \vdash \Gamma, A, B\ [\alpha, \rho]$.

(b) Für $\xi<\sigma$: $\vdash \Gamma, \forall x \in M_\sigma F(x)\ [\alpha, \rho] \Longrightarrow \vdash \Gamma, F(a^\xi)\ [\alpha \# \xi, \rho]$.

(c) Für $\gamma<\sigma$: $\vdash \Gamma, \forall x \in M_\sigma F(x)\ [\alpha, \rho] \Longrightarrow \vdash \Gamma, \forall x \in M_\gamma F(x)\ [\alpha \# \gamma, \rho]$.

Beweis:

Wir zeigen (a) und (b) durch Induktion nach α; beim Beweis von (b) unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Wurde Γ nicht zuletzt durch einen Schluß mit Hauptformel $\forall x \in M_\sigma F(x)$ gewonnen, so folgt die Behauptung mit Hilfe der IV und L12(a),(e), da nach L10(b) $t(F(a^\xi)) \subset t(\forall x \in M_\sigma F(x)) \cup \{\xi\}$ ist.

2. Ist $\forall x \in M_\sigma F(x)$ die Hauptformel des letzten Schlusses, so hat dieser die Gestalt $(\forall)\ (\Lambda, F(b) : \mathrm{sch}(b)<\sigma) \vdash \Lambda, \forall x \in M_\sigma F(x)$. Für jedes b mit $\mathrm{sch}(b)<\sigma$ gibt es eine Ordinalzahl α_b, so daß gilt: $\vdash \Lambda, F(b)\ [\alpha_b, \rho]$ und $<(\alpha_b : \mathrm{sch}(b)<\sigma), \alpha>$ ist σ-schön. Nach L12(a) sind alle diese $\alpha_b<\alpha$, und wir erhalten, u.U. mit der IV: $\vdash \Lambda \setminus \{\forall x \in M_\sigma F(x)\}, F(b)\ [\alpha_b \# \mathrm{sch}(b), \rho]$. Nach L19 ist $t(\Gamma) \leq \alpha$, nach L12(b) gilt $\alpha_b \# \mathrm{sch}(b) \ll \alpha \# \mathrm{sch}(b)$. Mit L17 folgt also die Behauptung.

(c) folgt mit $(\forall)$-Schluß und L13(a) unmittelbar aus (b).

Bezeichnung

Wir bezeichnen mit $A^{(\alpha)}$ eine Formel, die dadurch aus A entsteht, daß endlich viele Terme $a_1, \ldots a_n$ mit Schichten $> \alpha$ ersetzt werden durch Terme $M_{\beta_1}, \ldots M_{\beta_n}$ mit $\alpha \leq \beta_i < \mathrm{sch}(a_i)$ (1≤i≤n). Für $F(\underline{c}, {}^{(\alpha)})$ schreiben wir $F^{(\alpha)}(\underline{c})$.

Lemma 20

$t(A) \preceq \gamma \Longrightarrow t(A^{(\alpha)}) \preceq \gamma$.

Satz 18 (Begrenzungssatz)

$\vdash A_1,\ldots A_n\ [\alpha,\ \rho] \quad ==\Rightarrow \quad \vdash A_1^{(\alpha)},\ldots A_n^{(\alpha)}\ [\alpha,\ \rho]$.

Beweis durch Induktion nach α:

Es sei $\Gamma := \{A_1,\ldots A_n\}$ und $\Gamma^{(\alpha)} := \{A_1^{(\alpha)},\ldots A_n^{(\alpha)}\}$. Wurde Γ nicht zuletzt durch einen Schluß mit einer Hauptformel $\exists x{\in}M_\sigma F(x)$ gewonnen, die beim Übergang zu $\Gamma^{(\alpha)}$ die Gestalt $\exists x{\in}M_\gamma F^{(\alpha)}(x)$ mit $\alpha \leqq \gamma < \sigma$ annimmt, so folgt die Behauptung mit IV, L19 und L20. Anderenfalls gibt es 2 Möglichkeiten:

1. Γ ist Resultat von ($\exists$). Dann gibt es ein $\Lambda \subset \Gamma$, ein $\alpha_0 \ll \alpha$ und einen Term a mit $sch(a) \ll \alpha$, so daß $\vdash \Lambda, F(a)\ [\alpha_0,\ \rho]$. Mit IV folgt $\vdash \Lambda^{(\alpha)}, F^{(\alpha)}(a)\ [\alpha_0,\ \rho]$, und daraus erhalten wir mit ($\exists$) die Behauptung, da $sch(a) \ll \alpha \leqq \gamma$ ist und nach L19, L20 $t(\Gamma^{(\alpha)}) \leqq \alpha$ gilt.

2. Γ ist Resultat von (Clκ). Dann ist $\sigma=\kappa$, und die Hauptformel hat die Gestalt $\exists z{\in}M_\kappa \forall x{\in}a \exists y{\in}z G(x,y)$. Außerdem gibt es ein $\Lambda \subset \Gamma$ und ein $\alpha_0 \ll \alpha$ mit $\vdash \Lambda, \forall x{\in}a \exists y{\in}M_\kappa G(x,y)\ [\alpha_0,\ \rho]$. Mit der IV erhalten wir daraus $\vdash \Lambda^{(\alpha)}, \forall x{\in}a \exists y{\in}M_{\alpha_0} G^{(\alpha)}(x,y)\ [\alpha_0,\ \rho]$. Die Behauptung folgt nun wie oben.

Lemma 21 (Kollabierungslemma)

$\vdash \Gamma\ [\alpha,\ \rho]$ und $S(\Gamma) \leqq \nu$ und $\rho \leqq \nu^+ \quad ==\Rightarrow \quad \vdash \Gamma\ [D_\nu\alpha,\ \rho]$.

Beweis durch Induktion nach α:

Ist $\beta \in t(\Gamma)$, so ist $\beta \ll \alpha$ nach L19 und $S\beta \leqq S(\Gamma) \leqq \nu$ nach L10(e); daher gilt $\beta = D_\nu\beta \leqq D_\nu\alpha$. Wir erhalten also

(*) $t(\Gamma) \leqq D_\nu\alpha$.

Nach L18 und L11(h) können wir wegen $\rho \leqq \nu^+$ die IV auf die Prämissen des letzten Schlusses anwenden.

1. Ist Γ ein Axiom, Resultat eines Hauptschlusses oder eines Schnittes, so folgt die Behauptung mit IV und (*).

2. Ist Γ Resultat eines starken σ-Schlusses, so erhalten wir die Behauptung mit IV, (*) und L12(g); wegen $S(\Gamma) \leq \nu$ ist nämlich nach L10(e) auch $S\sigma \leq \nu$.

3. Ist Γ Resultat eines schwachen σ-Schlusses, so hat dieser die Gestalt (S) $\Lambda, F(a) \vdash \Lambda, B$ mit $\Lambda, B \subset \Gamma$. Dann ist $sch(a) < \sigma$ sowie $sch(a) \ll \alpha$, und es gibt ein $\alpha_0 \ll \alpha$ mit $\vdash \Lambda, F(a)\ [\alpha_0, \rho]$. Mit der IV erhalten wir $\vdash \Lambda, F(a)\ [D_\nu \alpha_0, \rho]$ und unterscheiden 2 Fälle:

3.1. $D_\nu \alpha_0 < sch(a)$. Wegen L19 und L10(f) muß dann (S) ein Schluß (∃) sein. Mit S18 folgt $\vdash \Lambda, F(M_{D_\nu \alpha_0})\ [D_\nu \alpha_0, \rho]$. Daraus erhalten wir mit (∃) und (*) die Behauptung, da $D_\nu \alpha_0 \ll D_\nu \alpha$ und $D_\nu \alpha_0 < \sigma$ ist.

3.2. $sch(a) \leq D_\nu \alpha_0$. Dann ist $sch(a) = D_\nu sch(a) \ll D_\nu \alpha$. Die Behauptung folgt daher mit (S) und (*).

5. Schnittelimination in RS(Ω)

Lemma 22

$\vdash \Gamma\ [\alpha, \rho]$ und $\vdash \Lambda, A\ [\beta, \rho]$ ⟹ $\vdash \Gamma, \Lambda\ [\alpha \# \beta, \rho]$.

Beweis mit L17 und L19.

Lemma 23 (Schwaches Eliminationslemma)

$\vdash \Gamma, A\ [\alpha, \rho]$ und $\vdash \Lambda, \neg A\ [\beta, \rho]$ und $rn(A) = \rho$ ist nicht zulässig ⟹ $\vdash \Gamma, \Lambda\ [\alpha \# \beta, \rho]$.

Beweis durch Induktion nach $\alpha \# \beta$:

Da $rn(A)$ nicht zulässig ist, kann Γ, A bzw. $\Lambda, \neg A$ nicht Resultat eines Schlusses (Cl$_\kappa$) mit Hauptformel A bzw. $\neg A$ sein. Besondere Überlegungen sind nur notwendig, wenn Γ, A und $\Lambda, \neg A$ Resultate von σ-Schlüssen mit den Hauptformeln A und $\neg A$ sind. In allen anderen Fällen folgt die Behauptung mit IV, L22, S18 und

L12(e) wie bei prädikativen Systemen (vgl. etwa [29], [33]). Aus Symmetriegründen können wir uns auf folgende Situation beschränken: Γ,A ist Resultat eines starken σ-Schlusses

(S) $(\Gamma_o, F(b):b\in J) \vdash \Gamma_o, A$,

und $\Lambda,\neg A$ ist Resultat eines schwachen σ-Schlusses

$(\breve{S})$ $\Lambda_o, \neg F(a) \vdash \Lambda_o, \neg A$.

Dann ist $a \in J$; außerdem gibt es ein $\beta_o \ll \beta$ und für jedes $b \in J$ ein α_b, so daß gelten:

(1) $\vdash \Gamma_o, F(b)\ [\alpha_b, \rho]$ für $b \in J$ und $<(\alpha_b:b\in J),\alpha>$ ist σ-schön

(2) $\vdash \Lambda_o, \neg F(a)\ [\beta_o, \rho]$ und $sch(a) \ll \beta$.

Mit Hilfe der IV und L22 erhalten wir daraus

(3) $\vdash \Gamma_o \setminus \{A\}, \Lambda, F(a)\ [\alpha_a \# \beta, \rho]$

(4) $\vdash \Gamma, \Lambda_o \setminus \{\neg A\}, \neg F(a)\ [\alpha \# \beta_o, \rho]$.

Wegen $<(\alpha_b:b\in J),\alpha>$ σ-schön und $sch(a) \ll \beta$ ist nach L12(c) $\alpha_a \# \beta \ll \alpha \# \beta$; $\alpha \# \beta_o \ll \alpha \# \beta$ ist klar. Nach S16 ist $rn(F(a)) < \rho$, so daß die Behauptung mit einem Schnitt aus (3) und (4) folgt.

Lemma 24 (Starkes Eliminationslemma)

Unter den Voraussetzungen

(a) $\vdash \Gamma, \{\forall x \in M_{\nu^+} F_i(x):1\le i\le m\}, \exists x \in M_{\nu^+} H(x)\ [\alpha, \nu^+]$

(b) $\vdash \Lambda, \forall x \in M_{\nu^+} \neg H(x)\ [\beta, \nu^+]$

(c) $S(\Gamma) \le \nu$ und $sch(H(\bar{0})) < \nu^+$ und $sch(F_i(\bar{0})) < \nu^+$ für $1\le i\le m$

gilt $\vdash \Gamma, \Lambda, \{\forall x \in M_{\nu^+} F_i(x):1\le i\le m\}\ [\alpha \# \beta \# \nu^+(m+1), \nu^+]$.

Beweis:

Es seien $\underline{c} = c_1, \ldots c_m$ beliebige Terme der Schichten $\underline{\gamma} = \gamma_1, \ldots \gamma_m < \nu^+$. Wir schreiben $\underline{F(c)}$ für $(F_i(c_i):1\le i\le m)$ und $\xi \# \underline{\gamma}$ für $\xi \# \gamma_1 \# \ldots \# \gamma_m$. Mit dem Inversionssatz S17 erhält man:

(1) $\vdash \Gamma, \underline{F(c)}, \exists x \in M_{\nu^+} H(x)\ [\alpha \# \underline{\gamma}, \nu^+]$.

Da $S(\Gamma, \underline{F(c)}, \exists x \in M_{\nu^+} H(x)) \le \nu$ ist, folgt aus (1) mit dem

Kollabierungslemma L21 und dem Begrenzungssatz S18

(2) $\vdash \Gamma, \underline{F(c)}, \exists x \in M_\sigma H(x)\ [\sigma,\ \nu^+]$ für $\sigma := D_\nu(\alpha \# \underline{\gamma})$.

Aus der Voraussetzung (b) erhalten wir durch eine weitere Anwendung des Inversionssatzes S17

(3) $\vdash \Lambda, \forall x \in M_\sigma \neg H(x)\ [\beta \# \sigma,\ \nu^+]$.

Nach L11(c),(d) ist $rn(\exists x \in M_\sigma H(x)) < \nu^+$, nach L9(ε) gilt außerdem $\sigma \ll \alpha \# \beta \# \underline{\gamma} \# \nu^+$ und $\beta \# \sigma \ll \alpha \# \beta \# \underline{\gamma} \# \nu^+$. Daher folgt mit einem Schnitt aus (2) und (3)

(4) $\vdash \Gamma, \Lambda, \underline{F(c)}\ [\alpha \# \beta \# \underline{\gamma} \# \nu^+,\ \nu^+]$.

Durch m-fache Anwendung eines (∀)-Schlusses erhalten wir aus (4) mit L13(a) die Behauptung.

Satz 19 (1. Eliminationssatz)

(a) $\vdash \Gamma, A_1, \ldots A_n\ [\alpha,\ \rho+1]$ und $S(\Gamma) < \rho$ und $rn(A_1) = \ldots = rn(A_n) =$;

$\Longrightarrow \quad \vdash \Gamma, A_1, \ldots A_n\ [\omega^\alpha,\ \rho]$.

(b) $\vdash \Gamma\ [\alpha,\ \rho+1]$ und $S(\Gamma) < \rho \quad \Longrightarrow \quad \vdash \Gamma\ [\omega^\alpha,\ \rho]$.

Beweis:

Wir zeigen (a) durch Induktion nach α. Wurde $\Gamma, A_1, \ldots A_n$ zuletzt nicht durch einen Schnitt erschlossen, der Rang ρ hat, so folgt die Behauptung sofort mit der IV und L12(f). Anderenfalls gibt es $\alpha_0, \alpha_1 \ll \alpha$, eine Formel B mit $rn(B) = \rho$ sowie $\Lambda \subset \Gamma, A_1, \ldots A_n$ und $\Phi \subset \Gamma, A_1, \ldots A_n$, so daß

(1) $\vdash \Lambda, B\ [\alpha_0,\ \rho+1]$

(2) $\vdash \Phi, \neg B\ [\alpha_1,\ \rho+1]$.

Mit der IV folgt

(3) $\vdash \Lambda, B\ [\omega^{\alpha_0},\ \rho]$

(4) $\vdash \Phi, \neg B\ [\omega^{\alpha_1},\ \rho]$, und wir unterscheiden 2 Fälle:

1. ρ ist nicht zulässig. Die Behauptung folgt dann mit dem schwachen Eliminationslemma L23 und L17, da $\omega^{\alpha_0} \# \omega^{\alpha_1} \ll \omega^\alpha$ ist und nach L19 $t(\Gamma, A_1, \ldots A_n) \leqq \alpha \ll \omega^\alpha$ gilt.

2. ρ ist zulässig. Nach L11(g) hat dann jede Formel mit Rang ρ die Stufe ρ^- oder die Gestalt $\forall x \in M_\rho F(x)$, wobei $sch(F(\bar{0})) < \rho$ ist. Nach dem starken Eliminationslemma L24 erhalten wir aus (3) und (4) für eine natürliche Zahl m

(5) $\vdash \Lambda, \Phi \ [\omega^{\alpha_0} \# \omega^{\alpha_1} \# \rho m, \rho]$.

$\rho \ll \alpha$ gilt wegen (1), (2), L19 und L11(g). Daher ist also $\omega^{\alpha_0} \# \omega^{\alpha_1} \# \rho m \ll \omega^\alpha$. Somit folgt mit dem Strukturschlußlemma L17 aus (5) die Behauptung, da nach L19 $t(\Gamma, A_1, \ldots A_n) \leqq \alpha \leqq \omega^\alpha$ ist. (b) ist eine unmittelbare Folgerung aus (a).

Satz 20 (2. Eliminationssatz)

$\vdash \Gamma \ [\alpha, \beta+\omega^\rho]$ und β ist nicht zulässig und $\beta+\omega^\rho \leq \beta^+$ ==>

$\vdash \Gamma \ [(\rho, \alpha \# \rho), \beta]$.

Beweis durch Hauptinduktion nach ρ, Nebeninduktion nach α:

1. Wurde Γ zuletzt nicht durch einen Schnitt erschlossen, dessen Rang $\geq \beta$ ist, so folgt die Behauptung mit der Neben-IV und L12(h).

2. Anderenfalls gibt es eine Formel A, $\beta \leq rn(A) < \beta+\omega^\rho$, sowie $\alpha_0, \alpha_1 \ll \alpha$ und $\Lambda, \Phi \subset \Gamma$ mit

(1) $\vdash \Lambda, A \ [\alpha_0, \beta+\omega^\rho]$

(2) $\vdash \Phi, \neg A \ [\alpha_1, \beta+\omega^\rho]$.

Nach Neben-IV gilt

(3) $\vdash \Lambda, A \ [(\rho, \alpha_0 \# \rho), \beta]$

(4) $\vdash \Phi, \neg A \ [(\rho, \alpha_1 \# \rho), \beta]$.

2.1. $\rho = 0$. Dann ist $rn(A) = \beta$, und da β nicht zulässig ist, folgt mit dem schwachen Eliminationslemma L23

(5) $\vdash \Lambda, \Phi \ [(\rho, \alpha_0 \# \rho) \# (\rho, \alpha_1 \# \rho), \beta]$

und daraus mit dem Strukturschlußlemma L17 wie früher die Behauptung.

2.2. $\rho > 0$. Mit L19 folgt aus (1) und (2), daß $t(A) \leq \alpha$ und $t(\neg A) \ll \alpha_1$ ist. Nach L15 gibt es n und $\zeta<\rho$ mit $rn(A) < \beta+\omega^{\zeta}n$ und $it_n[\zeta,(\rho,\alpha_0\#\rho)\#(\rho,\alpha_1\#\rho)] \ll (\rho,\alpha\#\rho)$. Mit einem Schnitt erhalten wir aus (3) und (4)

(8) $\vdash \Lambda,\Phi\ [(\rho,\alpha_0\#\rho)\#(\rho,\alpha_1\#\rho),\ \beta+\omega^{\zeta}n]$.

Da $\beta \leq \beta+\omega^{\zeta}k < \beta^+$ gilt, also kein $\beta+\omega^{\zeta}k$ zulässig ist, können wir die Haupt-IV n-mal anwenden und erhalten

(7) $\vdash \Lambda,\Phi\ [it_n[\zeta,(\rho,\alpha_0\#\rho)\#(\rho,\alpha_1\#\rho)],\ \beta]$.

Mit dem Strukturschlußlemma L17 folgt wie früher die Behauptung.

Satz 21 (3. Eliminationssatz)

(a) $\vdash \Gamma\ [\alpha,\ \nu]$ und $S(\Gamma)$ nicht zulässig $\Longrightarrow$ $\vdash \Gamma\ [\alpha\#\nu,\ S(\Gamma)]$.

(b) $\vdash \Gamma\ [\alpha,\ \nu]$ und $S(\Gamma)$ zulässig $\Longrightarrow$ $\vdash \Gamma\ [\alpha\#\nu,\ S(\Gamma)+1]$.

Beweis:

(a) und (b) werden simultan durch Hauptinduktion nach ν und Nebeninduktion nach α bewiesen. Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir

$$^*\xi := \begin{cases} \xi & \text{, wenn } \xi \text{ nicht zulässig ist} \\ \xi+1 & \text{, wenn } \xi \text{ zulässig ist.} \end{cases}$$

1. Wurde Γ zuletzt nicht durch einen Schnitt gewonnen, dessen Rang $\geq {}^*S(\Gamma)$ ist, so folgt die Behauptung mit der Neben-IV und L12(e).

2. Anderenfalls gibt es eine Formel A mit $^*S(\Gamma) \leq rn(A) < \nu$ sowie $\alpha_0,\alpha_1 \ll \alpha$ und $\Lambda,\Phi \subset \Gamma$, so daß gilt:

(1) $\vdash \Lambda,A\ [\alpha_0,\ \nu]$

(2) $\vdash \Phi,\neg A\ [\alpha_1,\ \nu]$.

Wir setzen $\beta := \max(t(A)\cup t(\neg A))$ und erhalten:

(3) $\beta \leq \beta \prec \alpha$ (aus (1),(2) mit L19 und L3(e))

(4) $\beta \leq rn(A) < \omega\beta+\omega\beta \leq \beta^+ < \alpha$ (mit L11(e)).

(5) $S(\Gamma,A,\neg A) < S\delta$ (mit L11(b)) .

Mit der Neben-IV folgt aus (1), (2) und (5)

(6) $\vdash \Phi, \neg A\ [a_0 \# \nu, {}^*S\delta]$

(7) $\vdash \Phi, \neg A\ [a_1 \# \nu, {}^*S\delta]$

und daraus mit dem Kollabierungslemma L21

(8) $\vdash \Lambda, A\ [D_{S\delta}(a_0 \# \nu), {}^*S\delta]$

(9) $\vdash \Phi, \neg A\ [D_{S\delta}(a_1 \# \nu), {}^*S\delta]$.

Nach (4) erhalten wir mit einem Schnitt

(10) $\vdash \Lambda, \Phi\ [\gamma, {}^*S\delta + \omega^{3\delta+3}]$ für $\gamma := D_{S\delta}(a_0 \# \nu) \# D_{S\delta}(a_1 \# \nu)$

und mit dem 2. Eliminationssatz S20

(11) $\vdash \Lambda, \Phi\ [\delta, {}^*S\delta]$ für $\delta := (3\delta+3, \gamma \# 3\delta \# 3)$.

2.1. $S(\Gamma) = S\delta$. Dann folgt die Behauptung mit dem Strukturschluß-lemma L17 aus (11), da nach (3), L8(a) und L9(b),(d) $\delta \ll a \# \nu$ ist und nach L19 $t(\Gamma) \leq a \leq a \# \nu$ ist.

2.2. $S(\Gamma) < S\delta$. Dann folgt aus (11) mit dem 1. Eliminationssatz

(12) $\vdash \Lambda, \Phi\ [\delta, S\delta]$.

Nun können wir mit der Haupt-IV schließen auf

(13) $\vdash \Lambda, \Phi\ [\delta \# S\delta, {}^*S(\Gamma)]$.

Daraus erhalten wir die Behauptung wie bei 2.1.

6. Mengentheoretische Eigenschaften von RS(Ω)

Im folgenden werden einige mengentheoretische Eigenschaften von RS(Ω) zusammengestellt. Da ihre Beweise sehr ähnlich verlaufen, führen wir sie nur in einigen zentralen Fällen vollständig aus und beschränken uns sonst auf die Angabe der entscheidenden Schritte.

Für Herleitungen in RS(Ω) enthält rn(A) oft zu wenig Information über die Formel A, da man rn(A) z.B. nicht die Schichten der Terme entnehmen kann, die in A auftreten. Für solche Fälle

definieren wir die Norm einer Formel und gehen dabei sehr großzügig vor, um die folgenden Beweise möglichst übersichtlich zu machen. Wir verwenden ω-Potenzen, um Abgeschlossenheit unter # zu erhalten.

Definition der Norm $no(A)$ einer Formel A

1. Ist R eine von $\in$, Ad verschiedene n-stellige Relationskonstante ($n \geq 1$) und sind $a_1, \ldots a_n$ Terme der Schichten $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, so sei

$$no(R(a_1, \ldots a_n)) := no(\overline{R}(a_1, \ldots a_n)) := \omega^{3\alpha_1+1} \# \ldots \# \omega^{3\alpha_n+1} .$$

2. Sind a und b Terme der Schichten α und β, so sei

$$no(a \in b) := no(a \notin b) := \omega^{3\alpha+2} \# \omega^{3\beta+1} \quad \text{und}$$

$$no(Ad(a)) := no(\overline{Ad}(a)) := \omega^{3\alpha+2} .$$

3. $no(A \& B) := no(A \vee B) := no(A) \# no(B)$.

4. $no(\forall x \in M_\alpha F(x)) := no(\exists x \in M_\alpha F(x)) := \omega^{3\alpha} \# no(F(\bar{0}))$.

5. Ist a ein von M_α verschiedener Term der Schicht α, so sei

$$no(\forall x \in a F(x)) := no(\exists x \in a F(x)) := \omega^{3\alpha} 2 \# no(\bar{0} \in a \,\&\, F(\bar{0})) .$$

Lemma 25

(a) $no(A) = no(\neg A)$.

(b) Zu jeder Formel A gibt es ein $\alpha > 0$ mit $t(A) \ll \alpha \ll no(A)$.

(c) Zu jeder Formel $F(\bar{0})$ gibt es ein n, so daß für alle a^α $no(F(a^\alpha)) \ll no(F(\bar{0})) \# \omega^{3\alpha+2} n$ ist.

(d) Zu jeder Grundformel $A(u_1, \ldots u_n)$ gibt es ein m, so daß für alle α und alle Terme $\underline{a} = a_1, \ldots a_n$ mit Schichten $< \alpha$ die folgende Abschätzung gilt: $no(A^\alpha(\underline{a})) \ll \omega^{3\alpha} m \# \alpha_1 \# \ldots \# \alpha_n$; wenn die Schichten von $\underline{a} \ll \alpha$ sind, erhalten wir somit $no(A^\alpha(\underline{a})) \ll \omega^{3\alpha+1}$.

(e) $no(a^\alpha = b^\beta) \ll \omega^{3\alpha} 2 \# \omega^{3\beta} 2 \# \omega^{3\alpha+1} 5 \# \omega^{3\beta+1} 5 \# \omega^2 4$.

Beweis durch Nachrechnen.

Satz 22

(a) Für i=1,2: $no(A_i) \ll no(A_1 \& A_2)$.

(b) Für jeden komplexen Term a der Schicht α:

$no(\forall x \in M_\alpha (x \in a \to F(x))) \ll no(\forall x \in a F(x))$.

(c) $no(\exists x \in M_\beta (a=x)) \ll no(a \in M_\beta)$.

(d) $no(\exists x \in M_\beta (a=x \& F(x))) \ll no(a \in \{x \in M_\beta : F(x)\})$.

(e) Für $\alpha<\beta$: $no(F(a^\alpha)) < no(\forall x \in M_\beta F(x))$.

(f) Für $\kappa \leq sch(a)$: $no(a=M_\kappa) < no(Ad(a))$.

Beweis mit L25.

Satz 23 (Aussagenlogische Vollständigkeit von RS(Ω))

$\vdash \neg A, A \ [no(A), 0]$.

Beweis durch Induktion nach no(A):

1. Hat A oder ¬A die Gestalt $R(a_1, \ldots a_n)$, wobei R eine von ∈ und Ad verschiedene n-stellige Relationskonstante ist, so folgt die Behauptung aus den Axiomen.

2. Hat A oder ¬A die Gestalt a∈b, so gibt es 2 Möglichkeiten:

2.1. sch(b) = 0. Dann folgt die Behauptung aus (Ax3).

2.2. sch(b) > 0. Dann folgt die Behauptung mit S22(c),(d), IV und den Hauptschlüssen $(\in^1)$, $(\notin^1)$, $(\in^2)$, $(\notin^2)$.

3. Hat A oder ¬A die Gestalt Ad(a), so gibt es 2 Möglichkeiten:

3.1. $sch(a) < \Omega_1$. Dann folgt die Behauptung aus (Ax10).

3.2. $sch(a) \geq \Omega_1$. Dann erhalten wir nach S22(f) mit der IV für alle $\kappa \leq sch(a)$: $\vdash a \neq M_\kappa, a=M_\kappa \ [no(a=M_\kappa), 0]$. Mit den Schlüssen (Ad), $(\overline{Ad})$, L25(e), L8 und L13(d) folgt die Behauptung.

4. A oder ¬A hat die Gestalt B&C. Nach L25(b) gibt es $\beta,\gamma > 0$ mit $t(B) \leqq \beta \ll no(B)$ und $t(C) \leqq \gamma \ll no(C)$; nach S22(a) erhalten wir mit der IV

$\vdash \neg B, B \ [no(B), 0]$ sowie $\vdash \neg C, C \ [no(C), 0]$

und daraus mit (∨)

$\vdash \neg B \vee \neg C, B$ [no(B)# γ, 0] sowie $\vdash \neg B \vee \neg C, C$ [no(C)# β, 0] .

Mit (&) folgt daraus die Behauptung.

5. Hat A oder $\neg A$ die Gestalt $\forall x \in a \bar{F}(x)$, so gibt es 3 Möglichkeiten:

5.1. sch(a) = 0. Dann folgt die Behauptung aus (Ax4).

5.2. sch(a) > 0 und a ist ein komplexer Term. Dann folgt die Behauptung mit S22(b), IV und den Hauptschlüssen (b$\forall$), (b$\exists$).

5.3. $a = M_\alpha$. Dann erhalten wir nach S22(e) mit der IV für alle Terme b mit $sch(b) < \alpha$: $\vdash \neg F(b), F(b)$ [no(F(b)), 0]. Mit den Schlüssen ($\exists$), ($\forall$), L25(c) und L13(b) folgt die Behauptung.

Lemma 26

(a) $\vdash \bar{n} = \bar{n}$ [3, 0] .

(b) $\vdash \bar{n} \neq \bar{m}, \bar{n} \neq \bar{k}, \bar{m} = \bar{k}$ [3, 0] .

(c) Für $\alpha > 0$: $\vdash a^\alpha \neq \bar{n}$ [α+3, 0] .

(d) Für $\alpha > 0$: $\vdash a^\alpha \notin M_1$ [α+5, 0] .

Beweis folgt unmittelbar aus den Axiomen.

Lemma 27

(a) $\vdash a^\alpha = a^\alpha$ [$\omega^{3\alpha} \# \omega^{3\alpha+1} \# 4$, 0] .

(b) Für $\beta > \alpha$: $\vdash a^\alpha \in M_\beta$ [$\omega^{3\alpha} \# \omega^{3\alpha+1} \# \beta \# 6$, 0] .

Beweis:

(a) und (b) werden simultan durch Induktion nach α mit S23 und Fallunterscheidung nach der Gestalt von a^α bewiesen.

Lemma 28

Für $\gamma < \beta$ gilt:

(a) $\vdash a^\alpha \neq M_\beta, c^\gamma \in a^\alpha$ [$\omega^{3\gamma+2} \# \omega^{3\beta+1} \# 6 \# 3$, 0] .

(b) $\vdash a^\alpha \neq b^\beta, c^\gamma \notin b^\beta, c^\gamma \in a^\alpha$ [$\omega^{3\gamma+2} \# \omega^{3\beta+1} \# \omega^{3\beta+1} \# 5$, 0] .

Beweis:

(a) und (b) folgen mit S23, (Ax3) und L27(b) unmittelbar aus der Definition der Gleichheit.

Lemma 29

(a) $\vdash \Gamma, a=b\ [\alpha, \rho] \Longrightarrow \vdash \Gamma, b=a\ [\alpha, \rho]$.

(b) $\vdash \Gamma, a\neq b\ [\alpha, \rho] \Longrightarrow \vdash \Gamma, b\neq a\ [\alpha, \rho]$.

Lemma 30

$\vdash a^{\alpha}\notin b^{\beta}, \exists x\in M_{\beta}(a^{\alpha}=x \,\&\, x\in b^{\beta})\ [\omega^{3\alpha+1}6 \# \omega^{3\beta+1}, 0]$.

Beweis:

1. $\beta = 0$. Dann folgt die Behauptung unmittelbar aus (Ax3).

2. $b^{\beta} = M_{\beta}$. Wir erhalten für alle c^{γ}, $\gamma<\beta$, mit S23

$\vdash a^{\alpha}\neq c^{\gamma}, a^{\alpha}=c^{\gamma}\ [no(a^{\alpha}=c^{\gamma}), 0]$,

und daraus mit L27(b), (&) und (∃)

$\vdash a^{\alpha}\neq c^{\gamma}, \exists x\in M_{\beta}(a^{\alpha}=x \,\&\, x\in M_{\beta})\ [no(a^{\alpha}=c^{\gamma}) \# \beta \# 1, 0]$.

Die Behauptung folgt mit L25(e), L13(b) (∀) und ($\notin^1$).

3. $b^{\beta} = \{x\in M_{\beta} : F(x)\}$. Wir erhalten für alle c^{γ}, $\gamma<\beta$, mit S23

(1) $\vdash a^{\alpha}\neq c^{\gamma}, a^{\alpha}=c^{\gamma}\ [no(a^{\alpha}=c^{\gamma}), 0]$

(2) $\vdash \neg F(c^{\gamma}), F(c^{\gamma})\ [no(F(c^{\gamma})), 0]$.

Mit L27(a), (&), (∃) und ($\in^2$) erhalten wir aus (2)

(3) $\vdash \neg F(c^{\gamma}), c^{\gamma}\in b^{\beta}\ [no(F(c^{\gamma})) \# \omega^{3\gamma} \# \omega^{3\gamma+1} \# \beta \# 5, 0]$.

Aus (1) und (3) folgt mit (&), (∨), (∃) und L25(e)

(4) $\vdash a^{\alpha}\neq c^{\gamma} \vee \neg F(c^{\gamma}), \exists x\in M_{\beta}(a^{\alpha}=x \,\&\, x\in b^{\beta})\ [no(a^{\alpha}\neq c^{\gamma} \vee \neg F(c^{\gamma})) \# \beta \# 3, 0]$

und daraus mit L25(d),(e), L13(b), (∀), ($\notin^2$) die Behauptung.

Lemma 31

(a) $\vdash b^{\beta}\notin b^{\beta}\ [\omega^{3\beta+1}7 + 1, \omega 3\beta+\omega 3]$.

(b) Für $\beta<\kappa$: $\vdash b^{\beta}\neq M_{\kappa}\ [\omega^{3\beta+2}2 \# \kappa, \omega 3\beta+\omega 3]$.

Beweis:

(a) zeigt man durch Induktion nach β mit (Ax3), L26(b) und L30;

(b) folgt aus (a) mit L28(a).

Lemma 32 (Gleichheitslemma)

(a) $\vdash a^\alpha \dagger b^\beta, a^\alpha \notin c^\gamma, b^\beta \in c^\gamma \ [\omega^{3\alpha+2} \# \omega^{3\beta+2} \# \omega^{3\gamma+2}, \rho]$

(b) $\vdash a^\alpha \dagger b^\beta, a^\alpha \dagger c^\gamma, b^\beta = c^\gamma \ [\omega^{3\alpha+2} \# \omega^{3\beta+2} \# \omega^{3\gamma+2} \# 2, \rho]$

(c) $\vdash a^\alpha \dagger b^\beta, c^\gamma \notin a^\alpha, c^\gamma \in b^\beta \ [\omega^{3\alpha+2} \# \omega^{3\beta+2} \# \omega^{3\gamma+2}, \rho]$,

wobei $\rho := \omega 3 \cdot \max\{\alpha,\beta,\gamma\} + \omega 3$.

Beweis simultan durch Induktion nach $\alpha \# \beta \# \gamma$:

(a) 1. $\gamma = 0$. Dann folgt die Behauptung aus (Ax3).

2. $c^\gamma = \{x \in M_\gamma : F(x)\}$. Nach IV und S23 gilt für alle d^δ mit $\delta<\gamma$:

$\vdash a^\alpha \dagger b^\beta, a^\alpha \dagger d^\delta, b^\beta = d^\delta \ [\omega^{3\alpha+2} \# \omega^{3\beta+2} \# \omega^{3\delta+2} \# 2, \rho]$

$\vdash \neg F(d^\delta), F(d^\delta) \ [no(F(d^\delta)), 0]$.

Mit (&), (v), (∃) und ($\in^2$) erhalten wir

$\vdash a^\alpha \dagger b^\beta, a^\alpha \dagger d^\delta \vee \neg F(d^\delta), b^\beta \in c^\gamma$

$[\omega^{3\alpha+2} \# \omega^{3\beta+2} \# \omega^{3\delta+2} \# no(F(d^\delta)) \# \gamma \# 4, \rho]$

und daraus mit L25(d), L13(b), (∀), ($\notin^2$) die Behauptung.

3. $c^\gamma = M_\gamma$. Analog zu 2.

(b) Ist $\beta=0$ oder $\gamma=0$, so folgt die Behauptung mit L26; anderenfalls erhalten wir sie mit L28 und Instanzen von (c), die nach IV gelten.

(c) 1. $\alpha = 0$. Dann folgt die Behauptung aus (Ax3).

2. $\alpha > 0$. Nach IV gilt für alle d^δ mit $\delta<\alpha$:

$\vdash c^\gamma \dagger d^\delta, d^\delta \notin b^\beta, c^\gamma \in b^\beta \ [\omega^{3\beta+2} \# \omega^{3\gamma+2} \# \omega^{3\delta+2}, \rho]$.

Mit L28(b) und einem Schnitt folgt daraus

$\vdash a^\alpha \dagger b^\beta, c^\gamma \dagger d^\delta, d^\delta \notin a^\alpha, c^\gamma \in b^\beta \ [\omega^{3\alpha+1} \# \omega^{3\beta+2} \# \omega^{3\gamma+2} \# \omega^{3\delta+2}, \rho]$,

und mit (v), (∀) und L13(b)

$\vdash a^\alpha \dagger b^\beta, \forall x \in M_\alpha (c^\gamma \dagger x \vee x \notin a^\alpha), c^\gamma \in b^\beta \ [\omega^{3\alpha+1} \# \omega^{3\beta+2} \# \omega^{3\gamma+2}, \rho]$.

Wir erhalten die Behauptung mit L30 und einem Schnitt.

Lemma 33

$\vdash a^{\alpha} \neq b^{\beta}, \neg Ad(a^{\alpha}), Ad(b^{\beta})\ [\omega^{3\alpha+2}2 \# \omega^{3\beta+2} \# 4,\ \omega 3 \cdot \max\{\alpha,\beta\} + \omega 3]$.

Beweis mit (Ax10), (Ad), ($\overline{Ad}$), L32, L31(b), L17 und L13(e).

Bezeichnung

Ist $\underline{a} = a_1, \ldots a_n$, so schreiben wir im folgenden $\xi \# \underline{a}$ als Abkürzung für $\xi \# sch(a_1) \# \ldots \# sch(a_n)$.

Satz 24 (Gleichheitssatz)

Es sei $A(u, v_1, \ldots v_n)$ eine Grundformel der Länge k. Dann gilt für alle ε-Zahlen σ und alle Terme a^{α}, b^{β}, $\underline{e}$ mit Schichten $<\sigma$:

$\vdash a^{\alpha} \neq b^{\beta}, \neg A^{\sigma}(a^{\alpha}, \underline{e}), A^{\sigma}(b^{\beta}, \underline{e})\ [\sigma k \# \alpha \# \beta \# \underline{e},\ \sigma+2k]$.

Beweis durch Induktion nach k:

1. Ist k=1, so folgt die Behauptung aus den Axiomen, L32, L33 und S23.

2. Ist k>0 und hat $A(u,\underline{v})$ nicht die Gestalt $\forall x \in u B(x,u,\underline{v})$ oder $\exists x \in u B(x,u,\underline{v})$, so folgt die Behauptung mit der IV und L13(b).

3. Anderenfalls können wir uns aus Symmetriegründen beschränken auf die Untersuchung von $A(u,\underline{v}) = \forall x \in u B(x,u,\underline{v})$ mit $m := ln(B(w,u,\underline{v})) < k$.

Ist $\alpha=0$ oder $\beta=0$, so folgt die Behauptung aus (Ax4) und L26(c).

Ist $\alpha>0$ und $\beta>0$, so erhalten wir mit der IV für alle c^{γ} mit $\gamma<\alpha$ und d^{δ} mit $\delta<\beta$:

(1) $\vdash a^{\alpha} \neq b^{\beta}, \neg B^{\sigma}(d^{\delta}, a^{\alpha}, \underline{e}), B^{\sigma}(d^{\delta}, b^{\beta}, \underline{e})\ [\sigma m \# \alpha \# \beta \# \delta \# \underline{e},\ \sigma+2k]$

(2) $\vdash c^{\gamma} \neq d^{\delta}, \neg B^{\sigma}(c^{\gamma}, a^{\alpha}, \underline{e}), B^{\sigma}(d^{\delta}, a^{\alpha}, \underline{e})\ [\sigma m \# \alpha \# \gamma \# \delta \# \underline{e},\ \sigma+2k]$

und daraus mit einem Schnitt und L29(b), L11(f)

(3) $\vdash a^{\alpha} \neq b^{\beta}, \neg B^{\sigma}(c^{\gamma}, a^{\alpha}, \underline{e}), d^{\delta} \neq c^{\gamma}, B^{\sigma}(d^{\delta}, b^{\beta}, \underline{e})$

$[\sigma m \# \alpha \# \beta \# \gamma \# \delta \# 1 \# \underline{e},\ \sigma+2k]$.

Je nach der Gestalt von a^{α} folgt aus (3) mit ($\exists$), (v) oder mit S23, ($\exists$), ($b\exists$), (v)

(4) $\vdash a^{\alpha} \neq b^{\beta}, \exists x \in a^{\alpha} \neg \mathcal{B}^{\sigma}(x, a^{\alpha}, \underline{e}), d^{\delta} \neq c^{\gamma} \vee c^{\gamma} \notin a^{\alpha}, \mathcal{B}^{\sigma}(d^{\delta}, b^{\beta}, \underline{e})$

$[\sigma m \# \alpha \# \beta \# \gamma \# \delta \# 6 \# \underline{e},\ \sigma + 2k]$

und daraus mit (∀) und L13(a)

(5) $\vdash a^{\alpha} \neq b^{\beta}, \exists x \in a^{\alpha} \neg \mathcal{B}^{\sigma}(x, a^{\alpha}, \underline{e}), \forall x \in M_{\alpha}(d^{\delta} \neq x \vee x \notin a^{\alpha}), \mathcal{B}^{\sigma}(d^{\delta}, b^{\beta}, \underline{e})$

$[\sigma m \# \alpha \# \beta \# \alpha \# \delta \# 6 \# \underline{e},\ \sigma + 2k]$.

Aus L28 und L30 erhalten wir außerdem

(6) $\vdash a^{\alpha} \neq b^{\beta}, \exists x \in M_{\alpha}(d^{\delta} = x \,\&\, x \in a^{\alpha})$ $[\sigma \# \alpha \# \beta \# \delta,\ \sigma]$,

wenn b^{β} die Gestalt M_{β} hat, und

(7) $\vdash a^{\alpha} \neq b^{\beta}, \exists x \in M_{\alpha}(d^{\delta} = x \,\&\, x \in a^{\alpha}), d^{\delta} \notin b^{\beta}$ $[\sigma \# \alpha \# \beta \# \delta,\ \sigma]$,

wenn b^{β} ein komplexer Term ist. Schneiden wir (5) und (6) bzw. (5) und (7), so folgt

(8) $\vdash a^{\alpha} \neq b^{\beta}, \exists x \in a^{\alpha} \neg \mathcal{B}^{\sigma}(x, a^{\alpha}, \underline{e}), \mathcal{B}^{\sigma}(d^{\delta}, b^{\beta}, \underline{e})$

$[\sigma m \# \alpha \# \beta \# \alpha \# \delta \# 7 \# \underline{e},\ \sigma + 2k]$,

wenn b^{β} die Gestalt M_{β} hat, und sonst zusätzlich mit (v)

(9) $\vdash a^{\alpha} \neq b^{\beta}, \exists x \in a^{\alpha} \neg \mathcal{B}^{\sigma}(x, a^{\alpha}, \underline{e}), d^{\delta} \notin b^{\beta} \vee \mathcal{B}^{\sigma}(d^{\delta}, b^{\beta}, \underline{e})$

$[\sigma m \# \alpha \# \beta \# \alpha \# \delta \# 9 \# \underline{e},\ \sigma + 2k]$.

Aus (8) bzw. (9) erhalten wir mit (∀) bzw. (∀) und (b∀) sowie mit L13(a) die Behauptung.

Satz 25 (Fundierung)

Es sei $A(u, v_1, \ldots v_n)$ eine Grundformel und

$A_{\in}(\underline{v}) := \forall x(\forall y \in x A(y, \underline{v}) \to A(x, \underline{v}))$.

Dann gibt es ein k, so daß für alle ε-Zahlen σ und alle Terme a, $\underline{c}$ mit Schichten $< \sigma$ gilt:

(a) $\vdash \neg \mathrm{Tran}(a), \neg A^{a}_{\in}(\underline{c}), \forall x \in a A^{a}(x, \underline{c})$ $[\sigma k \# \mathrm{sch}(a) \# \underline{c},\ 0]$.

(b) $\vdash \neg A^{\sigma}_{\in}(\underline{c}), \forall x \in M_{\sigma} A^{\sigma}(x, \underline{c})$ $[\sigma k \# \underline{c},\ 0]$.

Beweis:

Wir zeigen nur (a); (b) geht analog. Nach S23 und L25(d) gibt es ein m, so daß für alle Terme b^{β}, $\underline{c}$ mit Schichten $< \sigma$ gilt:

(1) $\vdash \neg A^{a}(b^{\beta}, \underline{c}), A^{a}(b^{\beta}, \underline{c})$ $[\sigma m \# \beta \# \mathrm{sch}(a) \# \underline{c},\ 0]$.

Mit (1), S23 und L13(c) zeigen wir durch transfinite Induktion nach β für alle Terme b^β mit $\beta<sch(a)$

(2) $\vdash \neg Tran(a), \neg A^a_\in(\underline{c}), b^\beta \notin a, A^a(b^\beta, \underline{c})$ $[\sigma m \# sch(a) \# \omega^{\beta+1} \# \underline{c},\ 0]$.

Daraus folgt die Behauptung mit L27(b) und L13(b).

Satz 26 (Induktion)

Es sei $A(u, v_1, \ldots v_n)$ eine Grundformel. Dann gibt es ein k, so daß für alle ε-Zahlen σ und alle Terme $\underline{c}$ mit Schichten $<\sigma$ gilt:

$\vdash A^\sigma(\bar{0}, \underline{c}) \,\&\, \forall x \in M_1 \forall y \in M_1 (A^\sigma(x, \underline{c}) \,\&\, Su(x,y) \to A^\sigma(y, \underline{c})) \to \forall x \in M_1 A^\sigma(x, \underline{c})$

$[\sigma k \# \underline{c},\ 0]$.

Beweis analog zum Beweis von S25.

Satz 27 (Paarmenge)

Für $\alpha, \beta < \omega\sigma$: $\vdash \exists x \in M_{\omega\sigma} (a^\alpha \in x \,\&\, b^\beta \in x)$ $[\omega^{3\alpha+2} \# \omega^{3\beta+2},\ 0]$.

Beweis mit L27(b).

Satz 28 (Vereinigungsmenge)

Für $\alpha < \omega\sigma$: $\vdash \exists z \in M_{\omega\sigma} \forall x \in a^\alpha \forall y \in x (y \in z)$ $[\omega^{3\alpha+2},\ 0]$.

Beweis mit L27(b) und (Ax4).

Satz 29 (Beschränkte Separation)

Ist $A(u, v_1, \ldots v_n)$ eine Δ_0-Grundformel der Länge k, so gilt für alle ε-Zahlen σ und alle Terme a, $\underline{c}$ mit Schichten $<\sigma$:

$\vdash \exists z \in M_\sigma (M(z) \,\&\, \forall x \in M_\sigma (x \in z \leftrightarrow x \in a \,\&\, A(x, \underline{c})))$

$[\omega(k+3) \# sch(a) \# \underline{c},\ \sigma+2k+2]$.

Beweis:

Setzen wir $\beta := sch(a) \# 1 \# \underline{c}$ und $b^\beta := \{x \in M_\beta : x \in a \,\&\, A(x, \underline{c})\}$, so läßt sich mit S24, L27(a), L30, L25(d) und L13 zeigen:

$\vdash M(b^\beta) \,\&\, \forall x \in M_\sigma (x \in b^\beta \leftrightarrow x \in a \,\&\, A(x, \underline{c}))$ $[\sigma(k+2) \# sch(a) \# \underline{c},\ \sigma+2k+2]$.

Mit ($\exists$) folgt daraus die Behauptung.

Satz 30 (Beschränkte Kollektion)

Ist $A(u,v,w_1,\ldots w_n)$ eine Δ_0-Grundformel, so gilt für alle κ und alle Terme a, $\underline{c}$ mit Schichten $<\kappa$:

$\vdash \forall x\in a\exists y\in M_\kappa A(x,y,\underline{c}) \to \exists z\in M_\kappa \forall x\in a\exists y\in z A(x,y,\underline{c})$ $[\kappa 2 \# sch(a) \# \underline{c}, 0]$.

Beweis:

Nach S23 erhalten wir für $\gamma := no(\forall x\in a\exists y\in M_\kappa A(x,y,\underline{c}))$

$\vdash \neg\forall x\in a\exists y\in M_\kappa A(x,y,\underline{c}), \forall x\in a\exists y\in M_\kappa A(x,y,\underline{c})$ $[\gamma, 0]$.

Daraus folgt mit (Clκ), (v) und L25(d) die Behauptung.

Lemma 34

(a) $\vdash Tran(M_\alpha)$ $[\omega^{3\alpha+1}, 0]$.

(b) $\vdash M_\alpha\in M_\beta, M_\alpha = M_\beta, M_\beta\in M_\alpha$ $[\omega^{3\alpha+1} \# \omega^{3\beta+1}, 0]$.

Beweis mit L27 und (Ax4).

Lemma 35

Ist $A(u,v_1,\ldots v_n)$ eine Grundformel der Länge k, so gilt für alle ε-Zahlen σ und alle Terme a, $\underline{c}$ mit Schichten $<\sigma$:

$\vdash \forall x\in M_\sigma(x\notin a \vee \neg A^\sigma(x,\underline{c})), \exists x\in a A^\sigma(x,\underline{c})$ $[\sigma(k+1) \# sch(a) \# \underline{c}, \sigma+2k]$.

Beweis mit Gleichheitssatz S24 und L30.

Lemma 36

Ist $A(u,v)$ eine Δ_0-Grundformel, und gilt

$\vdash A(M_\kappa, c^\gamma)$ $[\varepsilon_{\kappa+1}{}^k \# \varepsilon_{\gamma+1}{}^k, \max\{\varepsilon_{\kappa+1}, \varepsilon_{\gamma+1}\}+1]$

für alle κ, so gibt es m und n mit

$\vdash Ad(a^\alpha) \to A(a^\alpha, c^\gamma)$ $[\varepsilon_{\alpha+1}{}^m \# \varepsilon_{\gamma+1}{}^m, \max\{\varepsilon_{\alpha+1}, \varepsilon_{\gamma+1}\}+n]$

für alle Terme a^α.

Beweis mit Gleichheitssatz S24, (sch), $(\overline{Ad})$ und (v).

Lemma 37

(a) Es gibt m und n, so daß für alle Terme a^α und b^β gilt:

$\vdash Ad(a^\alpha) \to Tran(a^\alpha) \& N\in a^\alpha \quad [\varepsilon_{\alpha+1}{}^m,\ \varepsilon_{\alpha+1}{}^{+n}]$

$\vdash Ad(a^\alpha) \& Ad(b^\beta) \to a^\alpha\in b^\beta \vee a^\alpha = b^\beta \vee b^\beta\in a^\alpha$

$[\varepsilon_{\alpha+1}{}^m \# \varepsilon_{\beta+1}{}^m,\ \max(\varepsilon_{\alpha+1},\varepsilon_{\beta+1})^{+n}]$

$\vdash Ad(a^\alpha) \to \forall x\in a^\alpha \forall y\in a^\alpha \exists z\in a^\alpha (x\in z \& y\in z) \quad [\varepsilon_{\alpha+1}{}^m,\ \varepsilon_{\alpha+1}{}^{+n}]$

$\vdash Ad(a^\alpha) \to \forall x\in a^\alpha \exists z\in a^\alpha \forall y\in x \forall s\in y (s\in z) \quad [\varepsilon_{\alpha+1}{}^m,\ \varepsilon_{\alpha+1}{}^{+n}]$.

(b) Zu Δ_0-Grundformeln $A(u,v_1,\ldots v_k)$ und $B(u,v,w_1,\ldots w_k)$ gibt es m und n, so daß für alle Terme a^α gilt:

$\vdash Ad(a^\alpha) \to \forall \underline{z}\in a^\alpha \exists y\in a^\alpha (M(y) \& \forall x\in a^\alpha (x\in y \leftrightarrow x\in z_1 \& A(x,\underline{z})))$

$[\varepsilon_{\alpha+1}{}^m,\ \varepsilon_{\alpha+1}{}^{+n}]$

$\vdash Ad(a^\alpha) \to \forall \underline{z}\in a^\alpha (\forall x\in z_1 \exists y\in a^\alpha B(x,y,\underline{z}) \to \exists s\in a^\alpha \forall x\in z_1 \exists y\in s B(x,y,\underline{z}))$

$[\varepsilon_{\alpha+1}{}^m,\ \varepsilon_{\alpha+1}{}^{+n}]$.

(c) Für $\alpha^+ < \sigma$: $\vdash \exists y\in M_\sigma (Ad(y) \& a^\alpha\in y) \quad [\omega^{\alpha^+ +2} \# \alpha,\ 0]$.

Beweis:

(a) und (b) werden bewiesen mit L34, L27(b), S27, S28, S29, S30, L36 und L13(b); (c) folgt aus L27.

Lemma 38 (Σ-Persistenz)

Sind $A_1(\underline{u}),\ldots A_m(\underline{u})$ Σ-Grundformeln, so gilt für alle σ, alle Terme $\underline{a}$ mit Schichten $<\sigma$ und alle $\xi>\sigma$:

$\vdash \Gamma, A_1^\sigma(\underline{a}),\ldots A_m^\sigma(\underline{a}) \quad [\alpha,\ \rho] \quad ==\Rightarrow \quad \vdash \Gamma, A_1^\xi(\underline{a}),\ldots A_m^\xi(\underline{a}) \quad [\alpha\#\sigma,\ \rho]$.

Beweis:

Wir zeigen die Behauptung mit L12(e) durch Induktion nach α.

5. Der Zusammenhang zwischen RS(Ω) und der Struktur $\mathcal{U}$

Es sei im folgenden $\mathcal{U}$ eine Standardstruktur der natürlichen Zahlen. Bei der Definition der Terme und Formeln von RS(Ω) wird deutlich, daß ein enger Zusammenhang zwischen RS(Ω) und den

Hierarchien [illegible] zum Aufbau von RS(Ω) nur Ordinalzahlen aus $\bar{\theta}(\Omega)$ verwenden und damit keine direkte Korrespondenz zwischen den über U konstruktiblen Mengen und den Termen von RS(Ω) erhalten können. Da $\bar{\theta}(\Omega) \cap \Omega_1$ einen Ordinalzahlabschnitt bildet, entsprechen jedoch zumindest für $\alpha < \Omega_1$ die Terme mit Schichten <α genau den Elementen von L(U,α).

Definition der Übersetzung a^U eines RS(Ω)-Terms a

1. $\bar{n}^U := \bar{n}$ und $M_\alpha^U := L(U,\alpha)$.

2. Sind $\underline{a}$ Terme mit Schichten $\ll \alpha$ und ist $A(u,\underline{v})$ eine Grundformel, so sei $\{x \in M_\alpha : A^\alpha(x,\underline{a})\}^U := \{x \in L(U,\alpha) : L(\alpha)_U \models A(x,\underline{a}^U)\}$.

Definition der Übersetzung $A^{U,\alpha}$ einer RS(Ω)-Formel A

1. Ist R eine n-stellige Relationskonstante (n≥1) und sind $\underline{a}$ Terme mit Schichten <α, so sei
$R(\underline{a})^{U,\alpha} := R(\underline{a}^U)$ und $\bar{R}(\underline{a})^{U,\alpha} := \bar{R}(\underline{a}^U)$.

2. Ist R eine n-stellige Relationskonstante (n≥1) und hat einer der Terme $\underline{a}$ eine Schicht ≥α, so sei
$R(\underline{a})^{U,\alpha} := \bar{R}(\underline{a})^{U,\alpha} := (\bar{0}=\bar{1})$.

3. $(A\&B)^{U,\alpha} := A^{U,\alpha} \,\&\, B^{U,\alpha}$ und $(A \vee B)^{U,\alpha} := A^{U,\alpha} \vee B^{U,\alpha}$.

4. Ist a ein Term mit einer Schicht <α, so sei
$\forall x \in a F(x)^{U,\alpha} := \forall x \in a^U F^{U,\alpha}(x)$ und $\exists x \in a F(x)^{U,\alpha} := \exists x \in a^U F^{U,\alpha}(x)$.

5. Ist a ein Term mit einer Schicht ≥α, so sei
$\forall x \in a F(x)^{U,\alpha} := \forall x F^{U,\alpha}(x)$ und $\exists x \in a F(x)^{U,\alpha} := \exists x F^{U,\alpha}(x)$.

Lemma 33

Für $S(A_1,\ldots A_n) = \Omega$, $S\alpha = \Omega$, $\alpha < \beta$ und $\rho \leq \Omega_1$ gilt:

(a) $\vdash A_1,\ldots A_n\ [\alpha, \Omega_1] \Longrightarrow L(\beta)_U \models (A_1 \vee \ldots A_n)^{U,\alpha}$

(b) $\vdash \Gamma, A_1,\ldots A_n\ [\alpha, \rho]$ und $L(\beta)_U \not\models (A_1 \vee \ldots A_n)^{U,\alpha} \Longrightarrow$
$\vdash \Gamma\ [\alpha, \rho]$, falls U in $A_1,\ldots A_n$ nicht auftritt.

(c) $\vdash A_1,\ldots A_n\ [\gamma,\ \Omega_1] \quad ==\Rightarrow \quad L(\Omega_1)_{\mathcal{U}} \models (A_1 v \ldots A_n)^{\mathcal{U},\Omega_1}$

Beweis:

(a) und (b) werden mit L19 und Begrenzungssatz S18 durch Induktion nach α bewiesen; (c) folgt mit dem Kollabierungslemma L21 unmittelbar aus (a).

Teil D. Die Ordinalzahlanalyse

1. Die beweistheoretische Ordinalzahl

Im folgenden bezeichnen wir mit T immer eine formale Mengentheorie, die in der Sprache L^* formuliert ist und die Basisaxiome umfaßt. Ist $\prec$ eine prim.rek. Wohlordnung auf den natürlichen Zahlen, so setzen wir

$Prog_{\prec}(U) := \forall x \in N(\forall y \in N(R_{\prec}(y,x) \to U(y)) \to U(x))$

$I_{\prec}(U) := Prog_{\prec}(U) \to \forall x \in N U(x)$

und nennen eine Ordinalzahl $\alpha < \Omega_1$ beweisbar in T, wenn es eine prim.rek. Wohlordnung $\prec$ vom Ordnungstyp $|\prec| = \alpha$ gibt, für die $I_{\prec}(U)$ in T beweisbar ist. Wie bei Systemen der Arithmetik und Analysis heißt dann $|T| := \min\{\alpha \in On : \alpha \text{ nicht beweisbar in } T\}$ die beweistheoretische Ordinalzahl von T.

Unter einem T-schwachen Satz verstehen wir einen Σ-Satz A, der folgende Eigenschaft hat

$T \vdash \exists x A(d(x)) \quad ==\Rightarrow \quad T \vdash A \to \forall x(A(d(x)) \to A^x)$

und definieren damit

$T \leq \alpha \quad :\Leftrightarrow ==\Rightarrow$ Zu jedem in T herleitbaren T-schwachen Satz A gibt es ein $\beta < \alpha$ mit $\vdash A^{\sigma}[\beta, 0]$ bei $\sigma = \Omega_1$.

Lemma 40

Aus $T \leq \alpha < \Omega_1$ folgt

(a) $T \vdash I_{\prec}(U) \quad ==\Rightarrow \quad |\prec| \leq \omega^{\alpha}$.

(b) $|T| \geq \alpha \quad ==\Rightarrow \quad |T| = \alpha = \omega^{\alpha}$.

(c) Ist A ein T-schwacher Satz mit $L(\alpha)_N \models \neg A$, so gilt auch $T + \neg A \leq \alpha$, falls U in A nicht auftritt.

Beweis:

(a) und (b) werden bewiesen wie die entsprechenden Sätze in

und [29]; wir zeigen hier nur (c): Ist B ein in $T + \neg A$ herleitbarer $(T + \neg A)$-schwacher Satz, so ist $A \vee B$ in T herleitbar und ein T-schwacher Satz. Nach Voraussetzung gibt es also ein $\beta<\alpha$ mit $\vdash A^\sigma \vee B^\sigma\ [\beta, 0]$ bei $\sigma = \Omega_1$. Mit S17(a) und L39(b) erhalten wir $\vdash B^\sigma\ [\beta, 0]$.

2. Die beweistheoretische Ordinalzahl von KPu

Lemma 41 (KPu-Interpretationslemma)

Gilt $KPu \vdash A(\underline{u})$ für eine KPu-Formel $A(u_1,\ldots u_n)$, so gibt es m und k mit

$\vdash A^\sigma(\underline{a})\ [\sigma m \# \underline{a}, \sigma+k]$

für $\sigma = \Omega_1$ und für alle Terme $\underline{a}$ mit Schichten $<\sigma$.

Beweis durch Herleitungsinduktion:

Mit Hilfe der in Teil B.6. bewiesenen mengentheoretischen Eigenschaften von RS(Ω) überzeugt man sich leicht, daß die Behauptung für alle Axiome von KPu gilt; bei komplexeren Herleitungen folgt sie im wesentlichen mit der IV.

Satz 31 (KPu-Interpretationssatz)

Gilt $KPu \vdash A$ für einen KPu-Satz A, so gibt es m und n mit

$\vdash A^\sigma\ [\sigma m, \sigma+n]$ für $\sigma = \Omega_1$.

Beweis mit L41.

Lemma 42 (KPu-Ordinalzahllemma)

(a) Gilt $KPu \vdash A$ für einen Σ-Satz A, so gibt es ein $\alpha < \bar{\Theta}\varepsilon_{\Omega_1+1}0$ mit $\vdash A^\sigma\ [\alpha, 0]$ für $\sigma = \Omega_1$.

(b) $KPu \leq \bar{\Theta}\varepsilon_{\Omega_1+1}0$.

Beweis:

(a) Nach S31 gibt es m und n, so daß wir wegen $S(A^\sigma) = \sigma$ mit dem 1. Eliminationssatz S19, dem 3. Eliminationssatz S21 und dem Kollabierungslemma L21 $\vdash A^\sigma [\beta, 0]$ für $\beta = D_0(\sigma \# \omega_n(\sigma m))$ erhalten. Da $\beta < \overline{\Theta}\varepsilon_{\Omega_1+1}0$ ist, folgt die Behauptung.

(b) ergibt sich aus (a), da die KPu-schwachen Sätze genau die Σ-Sätze sind.

Satz 32 (KPu-Ordinalzahlsatz)

(a) $|KPu| = |ID_1| = \overline{\Theta}\varepsilon_{\Omega_1+1}0$.

(b) Ist $KPu \vdash A$ für einen Σ-Satz A, so gilt $L(\overline{\Theta}\varepsilon_{\Omega_1+1}0)_N \models A$.

(c) Ist A ein Π-Satz mit $L(\overline{\Theta}\varepsilon_{\Omega_1+1}0)_N \models A$, so gilt auch $|KPu + A| = |KPu|$, falls U in A nicht auftritt.

Beweis:

(a) Nach [6] und S4 gilt $\overline{\Theta}\varepsilon_{\Omega_1+1}0 = |ID_1| \leq |KPu|$; $|KPu| \leq \overline{\Theta}\varepsilon_{\Omega_1+1}0$ folgt mit L40(b) und L42(b).

(b) erhalten wir mit L42(a) und L39(a).

(c) ergibt sich aus L40(b),(c) und L42(b), da die KPu-schwachen Sätze genau die Σ-Sätze sind.

3. Die beweistheoretischen Ordinalzahlen von KPi^r und W-KPi

Bezeichnung

Ist Γ eine endliche Menge von Formeln der Sprache L^*, so schreiben wir $\Gamma(\underline{u})$, um auszudrücken, daß in den Formeln aus Γ höchstens die freien Variablen $\underline{u} = u_1, \ldots u_n$ auftreten. Mit $\Gamma^\alpha(\underline{a})$ bezeichnen wir dann die Menge der $PS(\Omega)$-Formeln, die aus Γ entsteht, wenn wir darin jede freie Variable u_i durch a_i ersetzen ($1 \leq i \leq n$) und alle unbeschränkten Quantoren durch M_γ beschränken.

Lemma 43 (H_1-Interpretationslemma)

Gilt $H_1 \vdash^{\alpha}_{\frac{1}{2}} \Gamma(\underline{u})$ für eine Menge $\Gamma(\underline{u})$ von Σ-Formeln, sind $\alpha,\beta < \varepsilon_0$ und ist $\gamma = \beta \# 4^{\alpha+1}$, so gilt

$\vdash \Gamma^{\sigma}(\underline{a})\ [\Omega_{\gamma} \# \underline{a},\ \Omega_{\gamma}]$

für $\sigma = \Omega_{\varepsilon_0}$ und alle Terme $\underline{a}$ mit Schichten >0 und $<\Omega_{\beta}$.

Beweis durch Induktion nach α:

1. Mit Hilfe der in Teil B.6. bewiesenen mengentheoretischen Eigenschaften von RS(Ω) folgt die Behauptung für die Axiome von H_1.

2. Ist $\Gamma(\underline{u})$ Konklusion von (G1) oder (G2), so folgt die Behauptung mit der IV.

3. $\Gamma(\underline{u})$ ist Konklusion von (G3). Dann ist $\Gamma(\underline{u}) = A(\underline{u}), \forall x \in b A(x,\underline{u})$ und $\Gamma^{\sigma}(\underline{a}) = A^{\sigma}(\underline{a}), \forall x \in d^{\delta} A^{\sigma}(x,\underline{a})$, wobei d^{δ} ein Term $\underline{a}$, M_1 oder $\bar{n}$ ist. Außerdem gibt es eine von $\underline{u}$ verschiedene freie Variable v und Ordinalzahlen $\alpha_v<\alpha$ sowie $\alpha_n<\alpha$ (für alle natürlichen Zahlen n) mit

$H_1 \vdash^{\alpha_v}_{\frac{1}{2}} \Gamma(\underline{u}), v \in b \to A(v,\underline{u})$ und $H_1 \vdash^{\alpha_n}_{\frac{1}{2}} \Gamma(\underline{u}), \bar{n} \in b \to A(\bar{n},\underline{u})$

Ist $\delta \neq 0$, so folgt bei $\gamma_0 = \beta \# 4^{\alpha}$ nach IV für alle Terme e^{ξ} mit $\xi<\delta$:

$\vdash \Gamma^{\sigma}(\underline{a}), e^{\xi} \in d^{\delta} \to A^{\sigma}(e^{\xi},\underline{a})\ [\Omega_{\gamma_0} \# \xi \# \underline{a},\ \Omega_{\gamma}]$,

und erhalten daraus sehr schnell die Behauptung. Ist $\delta=0$, so gilt die Behauptung nach (Ax4).

4. $\Gamma(\underline{u})$ ist Konklusion von (G4). Dann ist $\Gamma(\underline{u}) = A(\underline{u}), \exists x \in b A(x,\underline{u})$ und $\Gamma^{\sigma}(\underline{a}) = A^{\sigma}(\underline{a}), \exists x \in d^{\delta} A^{\sigma}(x,\underline{a})$, wobei d^{δ} ein Term $\underline{a}$, M_1 oder $\bar{n}$ ist. Außerdem gibt es ein $\alpha_0<\alpha$ und einen H_1-Term c mit

$H_1 \vdash^{\alpha_0}_{\frac{1}{2}} \Gamma(\underline{u}), c \in b \,\&\, A(c,\underline{u})$

Setzen wir $e=a_i$, wenn c die Variable u_i ist, $e=c$, wenn c ein Term N oder $\bar{n}$ ist, und $e=\bar{0}$, wenn c eine von $\underline{u}$ verschiedene

freie Variable ist, so erhalten wir bei $\gamma_0 + 1 \# \alpha$ mit Lemma 1.

$\vdash \Gamma^\sigma(\underline{a}), e \in d^\delta \,\&\, A^\sigma(e,\underline{a})\ [\Omega_{\gamma_0} \# \underline{a},\ \Omega_\gamma]$.

Mit (∃) und anschließend Begrenzungssatz S18 folgt für $\xi = \Omega_{\gamma_0+1}$

$\vdash \Gamma^\sigma(\underline{a}), \exists x \in M_\xi (x \in d^\delta \,\&\, A^\xi(x,\underline{a}))\ [\Omega_{\gamma_0} \# 1 \# \underline{a},\ \Omega_\gamma]$

und daraus mit L35, (sch) und L38 die Behauptung.

5. $\Gamma(\underline{u})$ kann nach Voraussetzung nicht die Konklusion von (G5) sein.

6. $\Gamma(\underline{u})$ ist Konklusion von (G6). Analog zu 4. Aber ohne Verwendung von S18, L25, (sch) und L38.

7. $\Gamma(\underline{u})$ ist Konklusion von (G7).

Dann ist $\Gamma(\underline{u}) = \Lambda(\underline{u}), \exists z \forall x \in b \exists y \in z A(x,y,\underline{u})$ und

$\Gamma^\sigma(\underline{a}) = \Lambda^\sigma(\underline{a}), \exists z \in M_\sigma \forall x \in d^\delta \exists y \in z A(x,y,\underline{a})$, wobei $A(v,w,\underline{u})$ eine Δ_0-Formel ist. Außerdem gibt es ein $\alpha_0 < \alpha$ mit

$H_1 \vdash^{\alpha_0}_2 \Gamma(\underline{u}), \forall x \in b \exists y A(x,y,\underline{u})$

Bei $\gamma_0 = \beta \# 4^\alpha$ erhalten wir mit der IV

$\vdash \Gamma^\sigma(\underline{a}), \forall x \in d^\delta \exists y \in M_\sigma A(x,y,\underline{a})\ [\Omega_{\gamma_0} \# \underline{a},\ \Omega_\gamma]$

und daraus mit dem Begrenzungssatz S18 für $\xi = \Omega_{\gamma_0+1}$

$\vdash \Gamma^\sigma(\underline{a}), \forall x \in d^\delta \exists y \in M_\xi A(x,y,\underline{a})\ [\Omega_{\gamma_0} \# \underline{a},\ \Omega_\gamma]$.

Anschließend folgt mit (∃) die Behauptung.

8. $\Gamma(\underline{u})$ ist Konklusion von (sch). Dann gibt es eine Π_1-Formel $A(\underline{u},\underline{v})$ und $\alpha_0, \alpha_1 < \alpha$ mit

(1) $H_1 \vdash^{\alpha_0}_2 \Gamma(\underline{u}), A(\underline{u},\underline{v})$

(2) $H_1 \vdash^{\alpha_1}_2 \Gamma(\underline{u}), \neg A(\underline{u},\underline{v})$.

Setzen wir $\gamma_1 = \beta \# 4^{\alpha_1}$, so erhalten wir aus (2) mit der IV

(3) $\vdash \Gamma^\sigma(\underline{a}), \neg A^\sigma(\underline{a},\bar{0},\ldots\bar{0})\ [\Omega_{\gamma_1} \# \underline{a},\ \Omega_\gamma]$

und daraus mit dem Begrenzungssatz S18 bei $\xi = \Omega_{\gamma_0+1}$

(4) $\vdash \Gamma^\sigma(\underline{a}), \neg A^\xi(\underline{a},\bar{0},\ldots\bar{0})\ [\Omega_{\gamma_1} \# \underline{a},\ \Omega_\gamma]$.

8.1. $A(\underline{u},\underline{v})$ ist eine Δ_0-Formel. Dann können wir auch auf (1) die IV anwenden und erhalten

(5) $\vdash \Gamma^{\sigma}(\underline{a}), A^{\sigma}(\underline{a},\bar{0},\ldots\bar{0})\ [\Omega_{\gamma_1} \# \underline{a},\ \Omega_{\gamma}]$.

Mit (sch) und L11(f) folgt aus (3) und (5) die Behauptung.

8.2. $A(\underline{u},\underline{v})$ hat die Gestalt $\forall x B(x,\underline{u},\underline{v})$, wobei $B(w,\underline{u},\underline{v})$ eine Δ_0-Formel ist. Wir wählen eine von $\underline{u},\underline{v}$ verschiedene freie Variable w und erhalten mit L4(b) aus (1)

(6) $H_1 \vdash^{\alpha}_{\frac{1}{2}} \Gamma(\underline{u}), B(w,\underline{u},\underline{v})$

(7) $H_1 \vdash^{\alpha}_{\frac{1}{2}} \Gamma(\underline{u}), B(\bar{n},\underline{u},\underline{v})$ für alle $\bar{n}$.

Setzen wir $\rho = \gamma_1+1$ und $\gamma_0 = \rho \# 4^{\alpha}$, so erhalten wir mit der IV für alle Terme d^{δ} mit $\delta<\xi$

(8) $\vdash \Gamma^{\sigma}(\underline{a}), B(d^{\delta},\underline{a},\bar{0},\ldots\bar{0})\ [\Omega_{\gamma_0} \# \delta \# \underline{a},\ \Omega_{\gamma}]$

und daraus mit (∀) und L13(a)

(9) $\vdash \Gamma^{\sigma}(\underline{a}), A^{\xi}(\underline{a},\bar{0},\ldots\bar{0})\ [\Omega_{\gamma_0} \# \xi \# \underline{a},\ \Omega_{\gamma}]$.

Mit (sch) und L11(f) folgt aus (4) und (9) die Behauptung.

Satz 33 (KPi^{Γ}-Interpretationssatz)

Gilt $KPi^{\Gamma} \vdash A$ für einen Σ-Satz A, so gibt es ein n mit

$\vdash A^{\sigma}\ [\Omega_n,\ \Omega_n]$ für $\sigma = \Omega_n$.

Beweis mit S15(b), L43 und Begrenzungssatz S18.

Lemma 44 (KPi^{Γ}-Ordinalzahllemma)

$KPi^{\Gamma} \leq \bar{\Theta}\Omega_{\omega}0$.

Beweis:

Es sei A ein in KPi^{Γ} herleitbarer KPi^{Γ}-schwacher Satz. Wegen $KPi^{\Gamma} \vdash \exists x Ad(x)$ erhalten wir mit einem Schnitt und L4(b), daß $KPi^{\Gamma} \vdash Ad(u) \to A^{u}$ gilt. Nach S15(b) und L43 gibt es ein n mit

$\vdash Ad(M_{\sigma}) \to A^{\sigma}\ [\Omega_n \# \sigma,\ \Omega_n]$ für $\sigma = \Omega_1$.

Mit L27(a), (Ad), S17(a) und (sch) folgt

$\vdash A^{\sigma}\ [\Omega_n+1,\ \Omega_n]$,

und daraus mit dem 3. Eliminationssatz S21 und dem Kollabierungslemma L21

$\vdash A^{\sigma}\ [D_0(\Omega_n 2+1),\ 0]$.

Da $D_0(\Omega_n 2+1) < \bar{\Theta}\Omega_\omega 0$ ist, haben wir die Behauptung gezeigt.

Satz 34 (KPi^r-Ordinalzahlsatz)

$|KPi^r| = |(\Delta^1_2\text{-CA})^r| = \bar{\Theta}\Omega_\omega 0$.

Beweis:

Nach [23] und S12(a) gilt $\bar{\Theta}\Omega_\omega 0 = |(\Pi^1_1\text{-CA})^r| \leq |(\Delta^1_2\text{-CA})^r| \leq |KPi^r|$;

$|KPi^r| \leq \bar{\Theta}\Omega_\omega 0$ folgt mit L40(b) und L44.

Satz 35 (W-KPi-Interpretationssatz)

Gilt W-KPi$\vdash A$ für einen Σ-Satz A, so gibt es ein $\alpha<\varepsilon_0$ mit

$\vdash A^{\sigma}\ [\Omega_\alpha,\ \Omega_\alpha]$ für $\sigma = \Omega_\alpha$.

Beweis mit S15(c), L43 und Begrenzungssatz S18.

Lemma 45 (W-KPi-Ordinalzahllemma)

$W\text{-}KPi \leq \bar{\Theta}\Omega_{\varepsilon_0} 0$.

Beweis analog zum Beweis von L44.

Satz 36 (W-KPi-Ordinalzahlsatz)

$|W\text{-}KPi| = |(\Delta^1_2\text{-CA})| = \bar{\Theta}\Omega_{\varepsilon_0} 0$.

Beweis:

Nach [5], [9], [26] und S12(b) gilt $\bar{\Theta}\Omega_{\varepsilon_0} 0 = |(\Delta^1_2\text{-CA})| \leq |W\text{-}KPi|$;

$|W\text{-}KPi| \leq \bar{\Theta}\Omega_{\varepsilon_0} 0$ folgt mit L40(b) und L45.

4. Zur Ordinalzahlanalyse verwandter Systeme

Im letzten Abschnitt wird die syntaktische Abgrenzung der Theorien W-KPl und KPl skizziert; außerdem deuten wir an, wie man RS(Ω) verstärken muß, um damit auch KPi beweistheoretisch behandeln zu können.

Die Ordinalzahlanalyse von KPl orientiert sich an der Ordinalzahlanalyse von KPu. Wir zeigen durch Herleitungsinduktion das

KPl-Interpretationslemma

Gilt $KPl \vdash A(\underline{u})$ für eine KPl-Formel $A(u_1,\ldots u_n)$, so gibt es m und k mit

$\vdash A^{\sigma}(\underline{a})\ [\sigma m \# \underline{a},\ \sigma+k]$

für $\sigma = \Omega_\omega$ und für alle Terme $\underline{a}$ mit Schichten $<\sigma$.

Damit erhält man dann analog zu Teil C.2. $|KPl| \leq \overline{\theta}\varepsilon_{\Omega_\omega+1}0$. Mit [5], [26] und S11(c) folgt, daß diese Grenze scharf ist:

$$|KPl| = |(\Pi^1_1\text{-CA}) + (BI)| = |GPA| = |ID_\omega| = \overline{\theta}\varepsilon_{\Omega_\omega+1}0 .$$

Die Untersuchung von W-KPl ist nicht so einfach, da wir zur Bestimmung der scharfen Grenze die Theorie nicht vollständig in RS(Ω) einbetten dürfen. Hier helfen jedoch der Übergang zum halbformalen System H_o und die schwache Schnittelimination in H_o. Mit dem Kollabierungslemma L21 und dem 3. Eliminationssatz S21 beweisen wir (vgl. Behandlung von $W\text{-}ID_\omega$ in [5], [26]):

H_o-Interpretationslemma

Gilt $H_o \overset{\alpha}{\underset{1}{\vdash}} \neg\forall x \exists y(Ad(y) \,\&\, x\in y), \Gamma(\underline{u})$ für eine Menge $\Gamma(\underline{u})$ von Δ_o-Formeln und ist $\alpha<\varepsilon_o$, so gilt

$\vdash \Gamma(\underline{a})\ [D_{\Omega_m}(\Omega_\omega+\alpha+1)\# \underline{a},\ \Omega_m]$

für alle Terme $\underline{a}$ mit Schichten >0 und $<\Omega_m$.

Nach S15(a) ergibt dies die Abschätzung $|W\text{-}KPi| \leq \bar{\theta}(\Omega_\omega \varepsilon_0)0$. Mit [9], [20] und S11(b) folgt also

$$|W\text{-}KPi| = |(\Pi^1_1\text{-}CA)| = |PA| = |W\text{-}ID_\omega| = \bar{\theta}(\Omega_\omega \varepsilon_0)0 \ .$$

Die folgenden drei Bemerkungen weisen darauf hin, daß es unmöglich ist, KPi mit Hilfe von RS(Ω) beweistheoretisch zu untersuchen:

(a) Wegen des Fundierungsschemas läßt sich kein schwacher Schnitteliminationssatz für KPi oder für eine halbformale Version von KPi beweisen, der dem schwachen Schnitteliminationssatz von Teil A vergleichbar ist.

(b) Das kleinste Standardmodell von KPi hat die Gestalt $L(\iota_0)_N$, wobei ι_0 die erste rekursiv unerreichbare Ordinalzahl ist.

(c) In $\bar{\theta}(\Omega)$ gibt es keine rekursiv unerreichbaren Ordinalzahlen, da alle zulässigen Ordinalzahlen aus $\bar{\theta}(\Omega)$ die Gestalt $\Omega_{\alpha+1}$ haben.

Die syntaktische Abgrenzung von KPi, die nach S12(c) auch eine Abgrenzung für $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)$ liefert, wird in [18] durchgeführt werden. Dazu ist die Entwicklung eines stärkeren Bezeichnungssystems erforderlich, die den gegenwärtigen Rahmen sprengt. Es soll jedoch kurz angedeutet werden, wie sich das bisherige Verfahren verallgemeinern läßt.

1. Schritt. Nach einem allgemeinen Ansatz, der von Schütte in [30] skizziert wurde, erweitert man das Bezeichnungssystem $\bar{\theta}(\Omega)$ zu einem Bezeichnungssystem $\bar{\theta}(\Omega, I_0)$ mit einer neuen Konstanten I_0 für die erste rekursiv unerreichbare Ordinalzahl. Entscheidend ist es, die Existenz einer Kollabierungsfunktion $D^1_0 : \bar{\theta}(\Omega, I_0) \to \bar{\theta}(\Omega, I_0)I_0$ mit $D^1_0 : \bar{\theta}(\Omega, I_0)I_0$ zu

zu zeigen, die mit den bisherigen Kollabierungsfunktionen 'verträglich' ist. Die Existenz der Kollabierungsfunktion D^1_0 entspricht im neuen Bezeichnungssystem der Zulässigkeit von I_0; die Bedingung $I_0 = \Omega_{I_0}$ formalisiert, daß I_0 das Supremum von zulässigen Ordinalzahlen ist. Mit Hilfe der Kollabierungsfunktionen werden außerdem neue 'wesentlich-kleiner-Relationen' definiert. Von nun an verwenden wir kleine griechische Buchstaben als Mitteilungszeichen für Elemente von $\overline{\Theta}(\Omega,I_0)$.

2. Schritt. Das System $RS(\Omega)$ wird zu einem System $RS(\Omega,I_0)$ erweitert, indem man Konstanten M_α für alle $\alpha>0$ aus $\overline{\Theta}(\Omega,I_0)$ zuläßt und die Termbildung entsprechend verallgemeinert. Ersetzen wir in den Δ_0-Formeln aus L^* sämtliche freien Variablen durch $RS(\Omega,I_0)$-Terme, so erhalten wir die Formeln von $RS(\Omega,I_0)$. Wir definieren $S^1(A) := I_0$, wenn A eine Teilformel $\forall x\in M_\alpha F(x)$ mit $\alpha \geq I_0$ hat, und $S^1(A) := 0$ in allen anderen Fällen. Die Axiome und Schlüsse von $RS(\Omega)$ sowie die Ordinalzahlzuordnung bei den Herleitungen in $RS(\Omega)$ sind sinngemäß auf $RS(\Omega,I_0)$ zu übertragen; die Abschlußregel (Clκ) gilt dann natürlich für jede zulässige Ordinalzahl von $\overline{\Theta}(\Omega,I_0)$, insbesondere für I_0. Da sich alle mengentheoretischen Eigenschaften von $RS(\Omega)$ auch in dem System $RS(\Omega,I_0)$ zeigen lassen, können wir KPi in $RS(\Omega,I_0)$ einbetten und erhalten analog zu Teil C.2. den

KPi-Interpretationssatz

Gilt $KPi \vdash A$ für einen KPi-Satz A, so gibt es m und n mit $RS(\Omega,I_0) \vdash A^\sigma\ [\sigma m, \sigma+n]$ für $\sigma = I_0$.

3. Schritt. Um mit Hilfe des obigen Satzes die beweistheoretische Ordinalzahl von KPi abgrenzen zu können, müssen wir in dem System $RS(\Omega,I_0)$ Schnitte eliminieren.

Zuerst beseitigen wir ohne neue Probleme alle Schnitte, die einen Schnittrang I_0+n mit $n>0$ haben.

$>I_0$-Eliminationssatz

$RS(\Omega,I_0)\vdash A\ [\alpha,\ I_0+1+n] \Longrightarrow RS(\Omega,I_0)\vdash A\ [\omega_n(\alpha),\ I_0+1]$.

Um uns auch von Schnitten mit Schnittrang I_0 freizumachen, nützen wir wie früher das Zusammenspiel von Beschränkungs- und Kollabierungseigenschaften aus.

I_0-Kollabierungssatz

$RS(\Omega,I_0)\vdash A\ [\alpha,\ I_0]$ und $S^1(A)=0 \Longrightarrow RS(\Omega,I_0)\vdash A\ [D_0^1\alpha,\ I_0]$.

Analog zu Teil B.5. beweisen wir dann den

I_0-Eliminationssatz

$RS(\Omega,I_0)\vdash A\ [\alpha,\ I_0+1]$ und $S^1(A)=0 \Longrightarrow RS(\Omega,I_0)\vdash A\ [\omega^\alpha,\ I_0]$.

4. Schritt. Ist A ein in KPi herleitbarer Δ_0-Satz, so gibt es also m und n mit $RS(\Omega,I_0)\vdash A\ [\omega_n(I_0m),\ I_0]$. Mit dem I_0-Kollabierungssatz erhalten wir daraus $RS(\Omega,I_0)\vdash A\ [D_0^1\omega_n(I_0m),\ I_0]$, so daß alle Ordinalzahlen in der Herleitung $<I_0$ sind. Mit den Techniken von Teil B lassen sich die restlichen Schnitte eliminieren, und wir können anschließend die Ordinalzahlanalyse durchführen.

Literatur:

1. P. Aczel: The type theoretic interpretation of constructive set theory. Logic Colloquium 77. North Holland, Amsterdam (1978).

2. J. Barwise: Admissible Sets and Structures. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1975).

3. W. Buchholz: Normalfunktionen und konstruktive Systeme von Ordinalzahlen. Proof Theory Symposion Kiel 1974. Springer Lecture Notes in Math. 500 (1975).

4. W. Buchholz: Über Teilsysteme von $\overline{\theta}\{\{g\}\}$. Archiv f. Math. Logik u. Grundl. 18 (1976).

5. W. Buchholz: Eine Erweiterung der Schnitteliminationsmethode. Habilitationsschrift, München (1977).

6. W. Buchholz & W. Pohlers: Provable wellorderings of formal theories for transfinitely iterated inductive definitions. J. Symb. Logic 43 (1978).

7. P.J. Cohen: Set Theory and the Continuum Hypothesis. Benjamin, New York (1966).

8. W.B. Easton: Powers of regular cardinals. Ann. math. Logic I (1970).

9. S. Feferman: Formal theories for transfinite iterations of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis. Intuitionism and Proof Theory. North Holland, Amsterdam (1970).

10. S. Feferman: Predicatively reducible systems of set theory. Set Theory II. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1974).

11. S. Feferman: A language and axioms for explicit mathematics. Algebra and Logic. Springer Lecture Notes in Math. 450 (1975).

12. S. Feferman: Theories of finite type related to mathematical practice. Handbook of Mathematical Logic. North Holland, Amsterdam (1977).

13. S. Feferman: Recursion theory and set theory: a marriage of convenience. Generalized Recursion Theory II. North Holland, Amsterdam (1978).

14. S. Feferman: Conservation theorems for some forms of the axiom of choice over classical systems with restricted induction. Vervielfältigt (1976).

15. H. Friedman: Iterated inductive definitions and Σ^1_2-AC. Intuitionism and Proof Theory. North Holland, Amsterdam (1970).

16. H. Friedman: Set theoretic foundations for constructive analysis. Annals of Mathematics 105 (1977).

17. G. Jäger: Beweistheorie von KPN. Erscheint im Archiv f. Math. Logik u. Grundl.

18. G. Jäger & W. Pohlers: Admissibility in Proof Theory. In Vorbereitung.

19. G. Jäger & K. Schütte: Eine syntaktische Abgrenzung der (Δ^1_1-CA)-Analysis. Erscheint in den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

20. G. Kreisel: A survey of proof theory. J. Symb. Logic 33 (1968).

21. G. Kreisel: Generalized inductive definitions. Stanford Report on the foundations of analysis. Vervielfältigt, Stanford (1963).

22. G. Kreisel: Mathematical logic. Lectures on modern mathematics III. T.L. Saaty. Wiley & Sons, New York (1965).

23. W. Pohlers: Eine Grenze für die Herleitbarkeit der transfiniten Induktion in einem schwachen Π^1_1-Fragment der klassischen Analysis. Dissertation, München (1973).

24. W. Pohlers: Teilsysteme der Analysis und formale Systeme für induktive Definitionen. Vortrag in Münster. Vervielfältigt (1976).

25. W. Pohlers: Eine kanonische Interpretation von ID^c_1. Vortrag in Münster. Vervielfältigt (1976).

26. W. Pohlers: Beweistheorie der iterierten induktiven Definitionen. Habilitationsschrift, München (1977).

27. W. Pohlers: Cut-elimination for impredicative infinitary systems. Part I: Ordinal analysis for ID_ω. Erscheint im Archiv f. Math. Logik u. Grundl.

28. W. Pohlers: Cut-elimination for impredicative infinitary systems. Part II: Ordinal analysis for iterated inductive definitions. Erscheint im Archiv f. Math. Logik u. Grundl.

29. K. Schütte: Proof Theory. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1977).

30. K. Schütte: Höhere Normalfunktionen. Vervielfältigt. München.

31. D.S. Scott: Constructive validity. Symposium on Automatic Demonstration. Springer Lecture Notes in Math. 125 (1968).

32. J. Shoenfield: Mathematical Logic. Addison-Wesley, Reading (1967).

33. W.W. Tait: Normal derivability in classical logic. The Syntax and Semantics of Infinitary Languages. Springer Lecture Notes in Math. 72 (1968).

34. W.W. Tait: Applications of the cut-elimination theorem to some subsystems of classical analysis. Intuitionism and Proof Theory. North Holland, Amsterdam (1970).

35. G. Takeuti: Proof Theory. Studies in Logic 81. North Holland, Amsterdam (1975).

Lebenslauf

Geburtsdatum:	12. Dezember 1953
Geburtsort:	Augsburg
Schulbildung:	1960 bis 1964 Volksschule an der Implerstraße in München
	1964 bis 1973 Theresien-Gymnasium in München, altsprachlicher Zweig
	Mai 1973 Abitur
Studium:	1973 bis 1978 Mathematik mit Nebenfach Logik und Wissenschaftstheorie an der Ludwig-Maximilians-Universität München
	1978 bis 1979 Mathematik, Promotion
Abschlußprüfung:	Januar 1978 Diplom in Mathematik

München, im Oktober 1979